KATOLICKI UNIWERSYTET LUBELSKI JANA PAWŁA II

WYDZIAŁ FILOZOFII

FUNDACJA ROZWOJU KUL

skrypt

ETAP SZKOLNY

OGÓLNOPOLSKI

KONKURS LOGICZNY

KONKURSLOGICZNY.KUL.PL

etap finałowy | 14 czerwca 2022

etap szkolny online | 21 kwietnia 2022

10

| projekt Andrzej Zykubek

Fundacja Rozwoju KUL/ Katedra Logiki KUL

X Ogólnopolski Konkurs Logiczny

Lublin 2021/22

Spis treści

Wprowadzenie

Logika zwykle bywa kojarzona z matematyką, dokładniej z początkiem licealnego kursu matematyki i pojawiającymi się wtedy tabelami 0-1. Tymczasem logika jest dużo starsza od matematyki i sięga początku nauki europejskiej, czyli starożytnej Grecji. Wówczas już występowała ona w swych najpiękniejszych szatach zarówno jako podstawowe narzędzie filozoficznego myślenia, jak i źródło podchwytliwych pytań stawianych przez bystrych Greków czy zagadek, którymi Ateńczycy zabawiali się podczas swych sympozjonów. Dajmy tu kilka przykładów.

Popularne było wówczas np. pytanie „Czy przestałeś bić swoją matkę?" albo zadawane szacownemu obywatelowi pytanie „Czy straciłeś rogi?" Zabawiano się też np. taką historyjką:

> „Gdy krokodyl porwał dziecko pewnej Egipcjance i ona prosiła go, aby dziecka nie zjadł, tylko jej oddał, krokodyl powiedział: «dobrze niewiasto, żal twój mnie wzruszył, wskażę ci drogę do odzyskania dziecka. Odpowiedz mi na pytanie, czy ci dziecko oddam. Jeśli odpowiesz prawdę, to ci dziecko oddam, a jeśli odpowiesz nieprawdę, to ci dziecka nie oddam». Matka po namyśle odparła: «Ty mi dziecka nie oddasz». Na to krokodyl: «No to dziecko straciłaś. Bo albo rzekłaś prawdę, albo nieprawdę. Jeśli mówiąc, że ja, krokodyl, dziecka ci nie oddam, powiedziałaś prawdę, no to ja ci dziecka nie oddam, bo inaczej nie byłoby prawdą to, co powiedziałaś. A jeśli nieprawdę rzekły twe usta, to wedle umowy, dziecko u mnie zostaje!». Ale matka nie zadowoliła się wyrokiem krokodyla i twierdziła, że dziecko jej się należy, bo, powiada, «jeśli rzekłam prawdę, to wedle umowy, powinieneś dziecko mi oddać, bo przyrzekłeś, że jeśli powiem prawdę, oddasz mi dziecko. Jeśli zaś nieprawdą jest to, com powiedziała, że nie oddasz mi dziecka, to musisz je oddać, inaczej bowiem nie byłoby nieprawdą, com powiedziała!» Kto ma słuszność: krokodyl czy Egipcjanka?"

Znane również są liczne paradoksy sformułowane przez starożytnych Greków do dziś spędzające sen z oczu kolejnym pokoleniom logików. Niektóre, jak paradoks kłamcy, zdają się nie mieć rozwiązania; inne, jak paradoksy Zenona, choć wydają się w większym czy mniejszym stopniu rozwiązane, nadal są opisywane i dyskutowane, stając się pretekstem do całkiem poważnych dociekań. Do tego dochodzą nowe zagadki, które są na poważnie badane na przykład w badaniach nad sztuczną inteligencją takie choćby jak stara zagadka o kapeluszach: „trójka przyjaciół: Mietek, Piotr i Zbyszek usiadła w rzędzie w ten sposób, że Mietek widzi Piotra i Zbyszka, Piotr widzi tylko Zbyszka, a Zbyszek nie widzi żadnego z pozostałych. Pokazano im pięć kapeluszy, z których trzy są koloru czerwonego, a dwa koloru białego. Po zawiązaniu im oczu, na głowę każdego włożono kapelusz. Po zdjęciu opaski z oczu na pytanie: Czy możesz powiedzieć, jakiego koloru kapelusz jest na twojej głowie?, najpierw Mietek, a potem Piotr odpowiedzieli, że nie mogą określić koloru swojego kapelusza. Po tych odpowiedziach Zbyszek stwierdził, że zna kolor swojego kapelusza. Jaki kapelusz ma Zbyszek i jak mógł to stwierdzić?"

Takich historyjek można by opowiadać wiele. Pokazują one, że logika może być bardzo przydatna w życiu, choć, jak widać, niekoniecznie ma coś wspólnego z matematyką. Raczej dostarcza ona rozkoszy „łamania głowy", a logicy jawią się jako ludzie bardzo sprawnie myślący, przed którymi czasem trzeba „mieć się na baczności".

Celem książeczki jest pomoc w przygotowaniu się do X Ogólnopolskiego Konkursu Logicznego. Podamy w niej szereg zagadek i prostych zadań logicznych. Żeby je rozwiązać, nie trzeba mieć szerokiej wiedzy, ale za to trzeba trochę „pomyśleć". Wszystkie informacje, które są potrzebne do ich rozwiązania, podamy na początku książeczki. Dla tych, którzy chcieliby podejść do pracy metodycznie, pokazujemy przykłady rozwiązań. W przykładach proponujemy zwykle dwa sposoby rozwiązania: dla „symbolofobów", którzy nie lubią wzorów, proponujemy rozwiązanie bez „wzorów", dla „symbolofilów", jeśli tacy jeszcze gdzieś się zachowali, rozwiązania ze wzorami. Ci zaś z Was, którzy lubią samodzielne myślenie, mogą te przykłady pominąć. Dla umożliwienia sprawdzenia poprawności rozwiązania zagadek, podajemy na końcu tej książeczki odpowiedzi.

Etap szkolny Konkursu będzie ograniczał się do zadań, których rozwiązanie zakłada elementarną znajomość klasycznego rachunku zdań i rachunku nazw. Dla osób, które będą przygotowywać się do drugiego etapu Konkursu (choć oczywiście nie tylko dla nich) jest przygotowany materiał wykraczający poza klasyczny rachunek zdań i rachunek nazw. Przykłady takich zadań występują w postaci niektórych pytań w rozpoczynającym tekst książeczki Quizie logicznym. Niektóre z zadań tu zamieszczonych pochodzą z zamieszczonych w spisie lektur książeczek wybitnego logika amerykańskiego R. Smullyana (oraz kilka zadań pochodzi ze zbioru zadań W. Marka i J. Onyszkiewicza); część teoretyczna zaś oparta jest na fragmentach zaczerpniętych z podręcznika *Elementy logiki dla prawników*.

Mamy nadzieję, że konkurs ten, do którego wstępem jest niniejsza książeczka, dostarczy nam wszystkim, czyli Wam, uczestnikom, Państwu Nauczycielom oraz nam, organizatorom, sporo zabawy. Liczymy, że Konkurs zapoczątkuje też dalszą współpracę między Wydziałem Filozofii KUL a szkołami biorącymi w nim udział. Miejscem codziennych kontaktów dla osób zainteresowanych zadaniami z logiki jest konto na portalu facebook (facebook.com/konkurslogiczny).

Rozdział 1

Etap szkolny

Quiz logiczny

„Ćwicz władzę wnioskowania. Od niej to przede wszystkim zawisło, by w twej woli nie powstała myśl niezgodna z prawami natury i ustrojem stworzenia rozumnego.” (Marek Aureliusz)

Dla rozgrzewki proponujemy mały quiz.

Oceń poprawność następujących wnioskowań:

1. Żaden książę nie gra w golfa. A więc żaden golfista nie jest księciem.

2. Zenon mówi, że wszyscy kradną. Skoro Zenon zawsze kłamie, to nikt nie kradnie.

3. Wszyscy romantyczni bohaterowie mówią wierszem. Niektórzy mówiący wierszem noszą białe koszule, a więc niektórzy romantyczni bohaterowie noszą białe koszule.

4. Klemens zna wszystkich znajomych Juliana. Większość znajomych Klemensa to nicponie. A zatem większość znajomych Juliana to nicponie.

5. Wszyscy muzycy śpią do południa. Amadeusz jest kontrabasistą, a jednak wstaje o świcie. Stąd wynika, że jutro będzie brzydka pogoda.

6. Gdy w pomieszczeniu pojawia się dym, czujnik uruchamia alarm. Alarm jest teraz wyłączony, więc w pomieszczeniu nie ma dymu.

7. Real wygra Ligę Mistrzów, tylko wtedy, gdy pokona Borussię. Jeżeli Real nie pokona Borussii, zwycięstwo przypadnie Bayernowi. A więc, jeżeli Real nie wygra Ligii Mistrzów, to wygra ją Bayern.

8. Na pewno Hubert lub Elwira odrobili pracę domową, są przecież najlepszymi uczniami w klasie. Skoro Hubert nie odrobił lekcji, to odrobiła je Elwira.

9. Cecylia zmieni samochód, jeśli wygra loterię. Jeżeli będzie miała nowy samochód, to stary sprzeda na aukcji. A więc, jeśli Cecylia wygra loterię, to sprzeda stary samochód.

10. Jeżeli na niebie pojawia się tęcza, to wcześniej musiał padać deszcz. Na niebie nie ma tęczy, a więc dzisiaj nie padało.

11. Jeśli Kolumb odkrył Amerykę lub Marco Polo był w Ameryce, to jeśli Kolumb odkrył Amerykę, to Marco Polo nie był w Ameryce.

12. Jeśli Jan nie będzie schlebiał Franciszkowi, to straci posadę. Jeśli Jan straci posadę, to popadnie w kłopoty finansowe; jeśli będzie schlebiał Franciszkowi, to straci dobrą opinię. Zatem Jan popadnie w kłopoty finansowe lub straci dobrą opinię.

1.1. Co każdy logik wiedzieć powinien ...

Rozdzialik ten podaje kilka elementarnych informacji, których znajomość wymagana jest przy rozwiązywaniu zadań z logiki i szerzej, przy wszelkim stosowaniu wiedzy logicznej do rozwiązywania zadań w każdej dziedzinie wiedzy. Informacje te mogą niektórym wydać się oczywiste, jednak praktyka wykazuje, że czasem oczywistości najtrudniej jest zauważyć; czasem też nasze wyczucie języka naturalnego, szczególnie gdy zajmujemy się problemami na wysokim stopniu abstrakcji, może zawodzić (wystarczy tu przypomnieć problemy w rozumowaniach dotyczących zbiorów nieskończonych).

1.1.1. Zerojedynkowe ujęcie klasycznego rachunku zdań

Pierwszą, najbardziej intuicyjną formą ustalenia znaczenia stałych logicznych (spójników zdaniowych) dotyczących wyrażeń zdaniowych jest 0–1 ujęcie klasycznego rachunku zdań. W podejściu tym znaczenie spójników zdaniowych (zwanych funktorami) jest określane za pomocą tak zwanych tabelek 0–1.
Zerojedynkowe ujęcie rachunku zdań opiera się na następujących założeniach:

1) Każdy funktor jest prawdziwościowy.
2) Każde zdanie jest bądź prawdziwe bądź fałszywe (zasada dwuwartościowości).

Użyte tu wyrażenie „funktor prawdziwościowy” znaczy tyle, co spójnik zdaniowy, który zachowuje się jak funkcja, to znaczy, że dla danych wartości logicznych zdań łączonych przez ten spójnik (czyli jego argumentów) istnieje dokładnie jedna wartość logiczna zdania przezeń utworzonego; inaczej mówiąc:

Definicja 1. *Funktor prawdziwościowy jest to funktor zdaniotwórczy od jednego, dwóch, lub więcej argumentów zdaniowych taki, że wartość logiczna każdego zdania utworzonego za pomocą tego funktora jest wyznaczona wyłącznie przez wartości logiczne jego argumentów, a nie przez treść tych argumentów.*

Powyższe założenia stwierdzają, iż w klasycznym rachunku zdań abstrahuje się od treści zdań (założenie o prawdziwościowości funktorów) oraz, że każdemu zdaniu przypisujemy jego wartość logiczną. Każdy funktor klasycznego rachunku zdań możemy więc traktować jako funkcję odwzorowującą zbiór $\{0, 1\}$ w zbiór $\{0, 1\}$. Wartości logiczne zdań (ich prawdziwość lub fałszywość) zwykło się zaznaczać za pomocą liczb 0, 1; jest to pewna umowa, równie dobrze w tabelkach moglibyśmy użyć zwrotów PRAWDA, FAŁSZ.

Wszystkich jednoargumentowych funktorów prawdziwościowych jest 4 (czyli 2^2, bo układamy ciągi dwuelementowe z dwóch elementów z powtórzeniami). Charakterystykę tych funktorów przedstawia tzw. tabelka 0–1.

	verum	asercja	negacja	falsum
p	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Dwuargumentowych funktorów prawdziwościowych jest 16 (2^4, bo tworzymy ciągi czteroelementowe z dwóch elementów z powtórzeniami).

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Spośród powyżej scharakteryzowanych funktorów tylko niektóre mają odpowiedniki w języku naturalnym. Wśród funktorów jednoargumentowych jest to funktor negacji (f_3), a spośród funktorów dwuargumentowych funktory: alternatywy łącznej (zwykłej) (f_2), implikacji (f_5), równoważności (f_7), koniunkcji (f_8), dysjunkcji (f_9), alternatywy rozłącznej (f_{10}) i jednoczesnego zaprzeczenia (binegacji) (f_{15}). Argumenty funktorów dwuargumentowych nazywa się członami (alternatywy, koniunkcji, itp.) z wyjątkiem implikacji, w wypadku której kolejność argumentów odgrywa rolę, dlatego odpowiednio pierwszy jej argument nazywa się jej poprzednikiem, a drugi następnikiem. Podstawowe informacje odnośnie do tych funktorów zawarte są w poniższych tabelach. Pierwsza z nich zawiera funktory przyjmowane w wykładzie logiki jako podstawowe. Druga zaś prezentuje pozostałe z funktorów mających odpowiedniki w języku naturalnym.

Negacja	Alternatywa (łączna)	Implikacja	Równoważność	Koniunkcja
Nie jest tak, że p	p lub q	Jeżeli p, to q	p wtedy i tylko wtedy, gdy q	p i q
Niezachodzenie stanu rzeczy	Zachodzenie co najmniej jednego stanu rzeczy	Zachodzenie stanu rzeczy stwierdzanego przez q pod warunkiem zajścia stanu rzeczy stwierdzanego przez p	Współzachodzenie lub współniezachodzenie stanów rzeczy stwierdzanych przez p i q	Współzachodzenie stanów rzeczy stwierdzanych przez p i q
$\sim p$ 0 1 1 0	$p \vee q$ 1 1 1 1 1 0 0 1 1 $\underline{0\ 0\ 0}$	$p \to q$ 1 1 1 $\underline{1\ 0\ 0}$ 0 1 1 0 1 0	$p \equiv q$ 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0	$p \wedge q$ $\underline{1\ 1\ 1}$ 1 0 0 0 0 1 0 0 0
	$p \vee q$ 1 1 – – 1 1	$p \to q$ 0 1 – – 1 1		$p \wedge q$ 0 0 – – 0 0

Pierwszy wiersz obu tabel zawiera nazwę zdania utworzonego za pomocą funktora; np. koniunkcja jest nazwą zdania utworzonego z dwóch wyrażeń zdaniowych za pomocą funktora koniunkcji. W drugim wierszu tabeli podany jest sposób odczytania tego zdania (np. koniunkcji) w języku naturalnym, trzeci — tzw. „ontologiczną interpretację zdania złożonego”, wskazującą to, jaki stan rzeczy stwierdza dane zdanie, wiersz czwarty zawiera tabelkę 0–1 prawdziwości i fałszywości poszczególnych zdań. Podkreślony tu został charakterystyczny dla danego zdania wiersz tabelki, będący swoistą „cechą rozpoznawczą” danego funktora, np. cechą charakterystyczną implikacji jest jej fałszywość, która zachodzi w jedynym przypadku, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Ostatni wiersz w obu tabelach zawiera tak zwane skrócone tabelki 0–1, podające warunek wystarczający prawdziwości lub fałszywości zdania z danym funktorem („–” oznacza, iż znajomość wartości logicznej argumentu funktora, pod którym kreseczka została umieszczona, nie jest potrzebna dla podania wartości logicznej całego zdania).

Dysjunkcja	Alternatywa rozłączna	Jednoczesne zaprzeczenie
Nie zarazem p oraz q	Albo p albo q	Ani p ani q
Niewspółzachodzenie stanów rzeczy stwierdzanych przez p i q	Niewspółzachodzenie i niewspółniezachodzenie stanów rzeczy stwierdzanych przez p, q	Wspólniezachodzenie stanów rzeczy stwierdzanych przez p i q
p/q $\underline{1\ 0\ 1}$ 1 1 0 0 1 1 0 1 0	$p \perp q$ 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0	$p \downarrow q$ 1 0 1 1 0 0 0 0 1 $\underline{0\ 1\ 0}$
p/q 0 1 – – 1 0		$p \downarrow q$ 1 0 – – 0 1

Przedstawione tabele pokazują różne sposoby interpretowania funktorów prawdziwościowych. Zauważmy, że tabelki 0-1 zapisane są nieco inaczej niż w podręcznikach logiki. W naszych tabelkach funktor zapisujemy pomiędzy argumentami (tak samo, jak w języku naturalnym spójnik stoi pomiędzy słowami, które spaja); tabelki zwykle wprowadzane w podręcznikach matematyki mają inny wygląd: argumenty funktora występują w nich jako pierwsze, a wartość wyrażenia złożonego, po wartościach argumentów. Oczywiście nie ma to wpływu na wyniki obliczeń. Zwróćmy też uwagę na fakt, że dwa z naszych symboli funktorów różnią się od tych, których najczęściej używają matematycy; jako symbolu funktora implikacji używamy $\rightarrow$ (możecie oczywiście używać dotąd stosowanego przez Was symbolu $\Rightarrow$), a podobnie rzecz się ma z funktorem równoważności (symbole: $\equiv$ – $\Leftrightarrow$). Podstawowe tabelki w notacji z podręczników matematyki mają postać:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Najważniejszym funktorem jednoargumentowym jest funktor negacji, który zmienia wartość logiczną zdania na przeciwną. Może on być wyrażany w języku naturalnym za pomocą różnych zwrotów. Zwykle w języku potocznym jest to słówko „nie" (np. *Jan nie kocha Julii*, *Podatki nie powinny być wysokie*). Tu polecamy używanie może brzmiącego sztucznie zwrotu „nie jest tak, że" (np. *Nie jest tak, że dzisiaj jest gorąco*); czasem używa się również zwrotu „nieprawda, że" (*Nieprawda, że Jan kocha Julię*). Użycie zwrotu „nie jest tak, że" pozwoli nam zawsze odróżniać zdanie negacyjne od zdania przeczącego.

Omówienie wybranych funktorów dwuargumentowych rozpoczniemy od funktora koniunkcji. Tworzy on wraz z dwoma argumentami zdaniowymi zdanie zwane koniunkcją, które stwierdza współzachodzenie dwóch stanów rzeczy stwierdzanych przez jego argumenty. Koniunkcja jest prawdziwa jedynie wówczas, gdy oba jej człony są prawdziwe. Koniunkcja może być wyrażona w języku naturalnym za pomocą różnych zwrotów, takich jak: „i", „oraz", „a", „ale", „lecz", „jednak", „chociaż", itp. Zatem zdania takie jak: *Jan śpi, a Zofia śpiewa*, *Chociaż Jan uczył się pilnie, Jan nie zdał egzaminu*, *Poziom inflacji obniżył się znacząco, jednak oprocentowanie kredytów nie zmalało*, mogą być traktowane jako zdania koniunkcyjne. Z kolei alternatywa ma dwie odmiany — łączną i rozłączną. Alternatywa łączna jest zdaniem, które jest prawdziwe, gdy zachodzi co najmniej jeden ze stanów rzeczy stwierdzanych przez argumenty funktora alternatywy; innymi słowy: alternatywa jest prawdziwa, gdy co najmniej jeden z jej członów jest prawdziwy. Oczywiście oznacza to, że alternatywa jest prawdziwa także wtedy, gdy prawdziwe są oba jej człony, a więc gdy prawdziwa jest koniunkcja. Prawdziwe zatem jest zarówno zdanie: *Warszawa jest stolicą Polski lub Warszawa leży nad Wołgą*, jak i zdanie *Warszawa jest stolicą Polski lub Warszawa leży nad Wisłą*. Alternatywa rozłączna natomiast jest to zdanie stwierdzające, że zachodzi dokładnie jeden z dwóch stanów rzeczy stwierdzanych przez jej człony; funktorowi alternatywy rozłącznej odpowiada słówko „albo", często też rozłączność alternatywy podkreślana jest przez zwrot „albo ... albo ...". Zatem prawdziwe nie może być zdanie „Warszawa jest stolicą Polski albo Warszawa leży nad Wisłą".

Implikacji i równoważności z kolei używa się do stwierdzania związku między stanami rzeczy stwierdzanymi przez ich człony. Równoważność stwierdza „równowagę" między stanami rzeczy stwierdzanymi przez jej człony, czyli taki związek między nimi, że gdy pierwszy ze stanów rzeczy zachodzi, wówczas zachodzi i drugi stan rzeczy lub gdy pierwszy z nich nie zachodzi, wówczas nie zachodzi i drugi. Dlatego równoważność jest prawdziwa, gdy oba jej człony są prawdziwe albo gdy oba jej człony są fałszywe. Równoważność wyrażają zwroty „wtedy i tylko wtedy, gdy", „zawsze i tylko, gdy", itp. Natomiast implikacja wyrażana zwrotem „Jeżeli ..., to ..." jest traktowana w logice formalnej jako pewnego rodzaju odpowiednik okresu warunkowego języka naturalnego. Implikacja stwierdza, że zachodzi stan rzeczy stwierdzany przez q, jeżeli (pod warunkiem, że) zachodzi stan rzeczy stwierdzany przez p. Cechą charakterystyczną implikacji jest to, że jest ona fałszywa jedynie wówczas, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. W pozostałych wypadkach implikacja jest prawdziwa. Prawdziwe są więc zarówno implikacje: *Jeżeli dziś jest poniedziałek, to jutro jest wtorek*, *Jeżeli nacisnę przycisk wy-*

łącznika, to w pokoju zgaśnie światło, jak i zdania: *Jeżeli Warszawa nie jest stolicą Polski, to jakieś inne miasto jest stolicą Polski*, *Jeżeli Warszawa nie jest stolicą Polski, to Lublin nie jest miastem*, itp.

Mówi się często, iż poprzednik implikacji wyraża warunek dostateczny (wystarczający) względem następnika, czyli prawdziwość poprzednika prawdziwej implikacji gwarantuje prawdziwość jej następnika. Na przykład w zdaniu: *Jeżeli jest się osobą prawną, to ma się zdolność do czynności prawnych* spełnienie warunku wyrażonego w poprzedniku wystarcza do zajścia tego, na co wskazuje następnik. Jednakże następnik może być też spełniony w innym wypadku, np., wracając do naszego przykładu, zdolność do czynności prawnych mają także osoby fizyczne. Warunek zatem wyrażony w poprzedniku implikacji nie jest konieczny względem następnika. Widzimy więc, że poprzednik prawdziwej implikacji może być fałszywy przy prawdziwym jej następniku. Z kolei należy zauważyć, że następnik prawdziwej implikacji wyraża warunek konieczny (niezbędny) względem jej poprzednika. Innymi słowy, jeśli w prawdziwej implikacji następnik jest fałszywy, to i poprzednik tej implikacji będzie fałszywy, jak widać w przytoczonym przykładzie: zdolność do czynności prawnych jest niezbędna dla bycia osobą prawną (bez tej zdolności osoba prawna nie byłaby osobą prawną). Podobnie w zdaniu: *Jeżeli naciśniesz przycisk wyłącznika prądu, to zgaśnie światło w pokoju*, poprzednik *Naciśniesz przycisk wyłącznika prądu* jest warunkiem wystarczającym następnika (*Zgaśnie światło.*), choć nie musi to być warunek niezbędny prawdziwości następnika, zaś ten następnik jest warunkiem koniecznym dla poprzednika (*Naciśniesz przycisk wyłącznika*).

1.1.2. Logika zdań a język naturalny

W tabelach 0-1 podaliśmy obowiązujące w „całym naukowym świecie" rozumienie funktorów prawdziwościowych. Jak łatwo można zauważyć, w tabelach występują jedynie odpowiedniki niewielkiej liczby spójników języka naturalnego. Teraz, żeby móc dobrze zapisywać w języku klasycznego rachunku zdań zadania podamy kilka uwag co do tego, jak rozumieć kilka często używanych spójników, których nie ma w powyższych tabelach. Zacznijmy od kilku przykładów:

— „r chyba, że p"
Przykład:
(1) *Nie zdasz matury (r), chyba że zaczniesz się uczyć (p).*
Zdanie to można wyrazić na dwa logicznie równoważne sposoby:
(2) *Jeżeli nie zaczniesz się uczyć, to nie zdasz matury.* — symbolicznie: $\sim p \rightarrow r$
oraz
(3) *Zaczniesz się uczyć lub nie zdasz matury.* — symbolicznie: $p \vee r$

Jeśli przedstawiamy zdanie (1) jako implikację (2), to zdanie występujące po wyrażeniu *chyba, że* zostaje zanegowane; jeżeli oddajemy zdanie (1) jako alternatywę (3), nie dodajemy negacji. Ogólnie:

$\boxed{r \text{ chyba, że } p \quad \text{wtw} \quad p \vee r \quad \text{wtw} \quad \sim p \rightarrow r}$

— „r jeśli p” a „r tylko jeśli p”

— „r jeśli p”
(1) *Zdasz test (r), jeśli otrzymasz 300 punktów (p).*
Zdanie występujące po *jeśli* określa warunek zdania testu, a zatem stanowi poprzednik implikacji. Widać to wyraźniej, jeżeli przekształcimy (1) na:
(1’) *Jeśli otrzymasz 300 punktów, to zdasz test.*
A zatem:

$\boxed{r \text{ jeśli } p \quad \text{wtw} \quad p \rightarrow r}$

— „r tylko jeśli p”
Inna sytuacja jest z wyrażeniem *tylko jeśli.* Zdanie występujące po *tylko jeśli* nie jest poprzednikiem implikacji, ale jej następnikiem.
Przykład:
(1) *Wygrasz w totolotka (r) tylko jeśli kupisz zakład (p).*
Niewątpliwie jest prawdą, że można wygrać w totolotka tylko wtedy, gdy się opłaci zakład. Nie można zatem traktować kupienie zakładu jako warunku dostatecznego wygrania w totolotka — zdanie (2) *Jeżeli kupisz zakład, to wygrasz w totolotka.* (czyli $p \rightarrow r$) jest niestety fałszywe. Dobry zapis otrzymamy gdy odwrócimy kierunek okresu warunkowego; mamy wówczas (1’) *Jeżeli wygrasz w totolotka, to [znaczy, że] musiałeś kupić zakład.* Innymi słowy (i to zdanie jest logicznie równoważne zdaniu (1)): (3) *Jeżeli nie kupisz zakładu, to nie wygrasz w totolotka* (czyli (3) $\sim p \rightarrow \sim w$).
Mamy zatem dwa sposoby przekładu:

$\boxed{r \text{ tylko jeśli } p \quad \text{wtw} \quad r \rightarrow p \quad \text{wtw} \quad \sim p \rightarrow \sim r}$

Przykłady tu podane są stosunkowo proste. Wielu innych spójników nie da się tak prosto potraktować, gdyż poza prostym związkiem między zdaniami wyrażonym przez tabelki 0-1, trzeba uwzględnić jeszcze dodatkowo związek między treściami zdań (co czyni te spójniki funktorami nieprawdziwościowymi). Wiele spójników spośród podanych w poniższym zestawieniu ma taką cechę. Zobaczmy zatem, jak można korzystając z narzędzi logiki scharakteryzować logicznie podstawowe spójniki języka polskiego (oczywiście w ćwiczeniach należy ograniczyć się jedynie do komponentu prawdziwościowego funktora, czyli tej części jego charakterystyki, która wyrażona jest za pomocą funktora prawdziwościowego):

p A q	A przeciwstawne	$p_x \wedge q_y \wedge x \neq y$	*Kowalski skacze, A Wiśniewski biega.*
p A POTEM q	A czasowe	$p \wedge q \wedge pTq$	
p A JEDNAK q	q CHOCIAŻ p		
p A WIĘC q	$p \wedge (q$ BO $p)$		
p A ZATEM q	p A WIĘC q		
p ALBO q (p LUB q)	ALBO niewyłączające	$p \vee q$	
p ALBO q	ALBO wykluczające	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	

p ALE q	p LECZ q	$p_x \wedge q_x \wedge x \neq y \wedge$ $\wedge L(q, \sim p)$	*W Rzymie jest metro, ALE w Łodzi dopiero będzie.*
ANI p ANI q		$\sim p \wedge \sim q$	
p BO q	BO eksplikatywne	$p_x \wedge q_x \wedge (q \Rightarrow p)$	
p BOWIEM q	p BO q		
p CHOCIAŻ q		$p \wedge q \wedge (P(p \wedge q)$ $< P(\sim p \wedge q))$	*Kowalski wygrał, CHOCIAŻ był słaby.*
p CHYBA, ŻE q		$\sim q \rightarrow p$	
p GDYŻ q	p BO q		
p I q	koniunkcja	$p \wedge q$	
p I q	I sekwencyjne	$p \wedge q \wedge pTq$	*Jan przyszedł na dworzec I wsiadł do autobusu*
p I q	I eksplikatywne	$p \wedge q \wedge q$ BO p	*Kowalski spadł z konia I złamał rękę*
p I q I ...	I enumeracyjne	$p \vee q \vee \ldots$	
p IŻ q	p ŻE q		
JEŻELI p, TO q	implikacja	$p \rightarrow q$	
JEŻELI p, TO q	implikacja ścisła	$p \Rightarrow q$	
p LECZ q	p ALE q		
p LUB q	alternatywa	$p \vee q$	
p PONIEWAŻ q	p BO q		
SKORO p TO q	zdarzenie p już nastąpiło	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	
p TYLKO JEŚLI q		$\sim q \rightarrow \sim p$	
p WIĘC q	SKORO p TO q		

Objaśnienia skrótów

pTq - „p poprzedza (w czasie) q”; Lpq - „q daje się wyprowadzić (ale nie wynika logicznie) z p”; $p \Rightarrow q$ - „p z konieczności implikuje q” (nie może być tak, że p i nie-q zarazem); $P(p < q)$ - ”Prawdopodobieństwo zajścia stanu rzeczy p jest mniejsze niż prawdopodobieństwo zajścia stanu rzeczy q”; p_x, q_y - wskazuje, że te same orzeczenia dokonujące się w zdaniach p, q dotyczą różnych podmiotów.

1.1.3. Wynikanie logiczne. Poprawność wnioskowań

Następne dwa pojęcia mają charakter semantyczny, gdyż odwołują się do pojęcia prawdziwości. Są to „prawo logiki” i „wynikanie logiczne”; to ostatnie jest kluczowym pojęciem logiki formalnej.

Definicja 2. *Prawo logiki zdań (tautologia)jest to prawdziwe wyrażenie zdaniowe zbudowane wyłącznie z funktorów prawdziwościowych i symboli zmiennych (oraz ewentualnie nawiasów).*

Definicja 3. *Ze zdań W_1, W_2,..., W_n wynika logicznie zdanie Z wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja „$(W_1 \wedge W_2 \wedge \ldots \wedge W_n) \rightarrow Z$” jest podstawieniem jakiegoś prawa logiki.*

Powyższa definicja określa więc wynikanie logiczne jako związek między zdaniami. Zdania W_1, W_2,..., W_n, czyli zdania, z których jakieś zdanie wynika logicznie nazywamy racjami, a zdanie wynikające z racji nazywamy następstwem. Można więc powiedzieć, że związek wynikania logicznego charakteryzuje się tym, że *zdanie warunkowe, którego poprzednikiem jest koniunkcja racji a następnikiem następstwo, nie może być fałszywe.* Zdanie to musi być prawdziwe, gdyż jest ono podstawieniem prawa logiki.

Logika formalna ma dostarczać schematów będących gwarantami niezawodności wnioskowania. Przypomnijmy, że wnioskowanie jest to proces myślowy, w którym na podstawie uznania pewnych zdań, zwanych przesłankami, dochodzimy do uznania zdania zwanego wnioskiem, połączonego z przesłankami związkiem uprawniającym do jego uznania. W logice formalnej wnioskowanie jest traktowane jako układ zdań złożony z przesłanek i wniosku, np.:

Przesłanka	Każdy człowiek jest śmiertelny.
Przesłanka	Każdy sędzia jest człowiekiem.
Wniosek	Każdy sędzia jest śmiertelny.

Przesłanki i wniosek wnioskowania są zdaniami w sensie logicznym (czyli wypowiedziami oznajmującymi albo prawdziwymi albo fałszywymi). Prawdziwość wniosku jest oparta na dwóch czynnikach: prawdziwości przesłanek i związku między przesłankami a wnioskiem. Oczywiście prawdziwość przesłanek jest sprawą pozalogiczną. Natomiast związek między przesłankami a wnioskiem gwarantujący prawdziwość wniosku przy prawdziwych przesłankach znajduje wyraz w pojęciu niezawodności wnioskowania. Logika formalna szczególnie koncentruje się na ustalaniu form (schematów) jednego z rodzajów wnioskowań niezawodnych, a mianowicie wnioskowania dedukcyjne, tzn. takie wnioskowania, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek. Innymi słowy, gwarantem niezawodności wnioskowań analizowanych w logice formalnej jest związek wynikania logicznego. Związek ów ma charakter formalny, tzn. zależny jest on wyłącznie od kształtu wyrażeń zdaniowych, a nie od ich treści. Badając więc, czy wnioskowanie jest dedukcyjne powinniśmy zacząć od pozbawienia zdań treści, aby móc następnie skupić się wyłącznie na ich formie. W ten sposób od wnioskowania przechodzimy do schematu wnioskowania.

Definicja 4. *Schemat wnioskowania jest to układ wyrażeń zdaniowych, który powstaje w wyniku zastąpienia we wnioskowaniu poszczególnych zdań przez odpowiednie zmienne (w każdym miejscu wnioskowania te same zdania zastępujemy przez te same zmienne).*

Jeśli w powyższym wnioskowaniu zastąpimy nazwę „człowiek" przez zmienną M, nazwę „śmiertelny" przez P, a „sędzia" przez S, otrzymamy schemat wnioskowania:

Każde M jest P.
Każde S jest M.
___
Każde S jest P.

Podobnie jeśli we wnioskowaniu:

Jeżeli Jan śpi w nocy, to Jan jest następnego dnia wypoczęty.
Nie jest tak, że Jan jest następnego dnia wypoczęty.
___
Nie jest tak, że Jan śpi w nocy.

zastąpimy stałą zdaniową „Jan śpi w nocy” przez zmienną p, a pozalogiczną stałą zdaniową „Jan jest następnego dnia wypoczęty”, przez zmienną q, otrzymamy schemat wnioskowania:

Jeżeli p, to q.
Nie jest tak, że q.

Nie jest tak, że p.

Aby zbadać, czy powyższe wnioskowanie jest dedukcyjne, musimy sprawdzić, czy między przesłankami a wnioskiem zachodzi związek wynikania logicznego. Związek ów zachodzi wtedy, gdy odpowiadająca schematowi wnioskowania implikacja jest podstawieniem jakiegoś prawa logiki. Od schematu wnioskowania przechodzimy do implikacji w ten sposób, iż przesłanki wnioskowania łączymy słówkiem „i” (funktorem koniunkcji), a koniunkcję przesłanek z wnioskiem funktorem implikacji. W ten sposób dla ostatniego z przykładów otrzymujemy implikację:

(1) Jeżeli (Jeżeli p, to q i Nie jest tak, że q), to nie jest tak, że p.

Aby związek wynikania logicznego między przesłankami a wnioskiem zachodził, powyższa implikacja powinna być prawem logiki. Jakieś wyrażenie zdaniowe jest prawem logiki, gdy spełnione są dwa warunki, a mianowicie: powinny występować w tym wyrażeniu wyłącznie stałe logiczne i symbole zmiennych oraz powinno ono być zawsze prawdziwe. Ten pierwszy, formalny warunek jest zaakcentowany w definicji formalnego schematu wnioskowania:

Definicja 5. *Schemat wnioskowania jest formalny, gdy jest zbudowany wyłącznie ze stałych logicznych i symboli zmiennych.*

Wracając do analizowanego przykładu widzimy, że implikacja (1) jest zbudowana wyłącznie ze stałych logicznych i symboli zmiennych, ma zatem „szansę” być prawem logiki (podobnie odpowiadający tej implikacji schemat wnioskowania jest formalny). Pozostaje tylko zbadać, czy owa implikacja jest wyrażeniem prawdziwym. Zapisujemy więc implikację (1) za pomocą wzoru: (1') $[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$ i sprawdzamy go za pomocą metody 0-1 (więcej o sprawdzaniu będzie w przykładach rozwiązywania zadań) — otrzymujemy tabelkę:

$[(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$q]$	$\to$	$\sim$	p
1	1	1	0	0	1	**1**	0	1
1	0	0	0	1	0	**1**	0	1
0	1	1	0	0	1	**1**	1	0
0	1	0	1	1	0	**1**	1	0

Na koniec dodajmy, że na podstawie ustaleń dotyczących związku między prawdziwością wniosku a prawdziwością przesłanek oraz charakterem relacji między przesłankami a wnioskiem, w logice przyjmowane są następujące określenia poprawności materialnej (czyli będącej pochodną materii faktów) i poprawności formalnej (zależnej od formy, czyli kształtu wnioskowania):

Definicja 6. *Wnioskowanie jest materialnie poprawne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego przesłanki są zdaniami prawdziwymi.*

oraz

Definicja 7. *Wnioskowanie jest formalnie poprawne wtedy i tylko wtedy, gdy jego wniosek wynika logicznie z przesłanek.*

W myśl tych określeń wnioskowanie:

Jeżeli Lublin leży nad Wisłą, to Lublin jest dużym miastem.
Lublin leży nad Wisłą.

Lublin jest dużym miastem.

jest materialnie niepoprawne, choć formalnie poprawne (co możecie sprawdzić za pomocą odpowiednich tabelek), podczas gdy wnioskowanie:

Jeżeli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3, to liczba jest podzielna przez 3.
Liczba jest podzielna przez 3.

Suma cyfr danej liczby jest podzielna przez 3.

jest oczywiście materialnie poprawne (przesłanki są prawdziwe), ale formalnie niepoprawne (co też możecie sprawdzić).

1.2. Co każdy logik umieć powinien ...

Ponieważ celem naszego konkursu jest „logika w działaniu”, ważne jest byśmy teraz mogli poćwiczyć sprawności logiczne. W niniejszym etapie ograniczamy się wyłącznie do sprawności w zakresie klasycznego rachunku zdań; sprawności owe dotyczą odkrywania struktury wnioskowań i badania ich formalnej poprawności oraz wywnioskowania informacji, która z innych informacji. Ponieważ chcemy pokazać, że logika „nie zna granic” zadania dotyczą wnioskowań w różnych dziedzinach wiedzy.

1.2.1. Zadania

1. Oceń wartość logiczną zdań.
   a) Prawdziwe jest zdanie: *Jan jest prokuratorem a jeżeli Jan jest prokuratorem, to Jan sporządza akty oskarżenia i Jan nie jest członkiem partii politycznej*. Jaka jest wartość logiczna zdania: *Jan jest członkiem partii politycznej*?

   b) Fałszywe jest zdanie: *Jeżeli Jan studiuje pielęgniarstwo, to Jan uczy się logiki lub Jan uczy się prawa rzymskiego*. Jaka jest wartość logiczna zdania: *Jeżeli Jan wyjechał do Pekinu, to Jan studiuje pielęgniarstwo*?

   c) Fałszywe jest następujące zdanie:
   Skazano Jana lub skazano Stefana.
   Jaka jest wartość logiczna zdania:
   Jeżeli skazano Stefana, to skazano Hipolita.

   d) Prawdziwe są zdania:
      i. *Jeżeli Kowalski nie dostosował prędkości prowadzonego samochodu do warunków jazdy lub Kowalski nie zauważył, że samochód Wiśniewskiego wykonuje manewr wyprzedzania, to samochód Kowalskiego zjechał do przydrożnego rowu i rozbił się.*
      ii. *Jeśli nadwozie samochodu Kowalskiego nie jest uszkodzone, to samochód ten nie rozbił się.*
      iii. *Nadwozie samochodu Kowalskiego nie jest uszkodzone.*

   Jaka jest wartość logiczna zdania: *Kowalski dostosował prędkość prowadzonego samochodu do warunków jazdy*?

Przykład

Jaka jest wartość logiczna zdania: *Jeżeli Hipolit zna tabelki 0-1 i Hipolit sprawnie myśli, to Hipolit wygra konkurs logiczny lub Hipolit będzie dobrym informatykiem*, gdy fałszywe jest zdanie: *Jeżeli Hipolit jest przystojny, to Hipolit sprawnie myśli*?

Rozwiązanie:
Zastępujemy zdania proste występujące w powyższych zdaniach złożonych przez odpowiednie zmienne:
p — *Hipolit zna tabelki 0-1.*
q — *Hipolit sprawnie myśli.*

r — *Hipolit wygra konkurs logiczny.*
s — *Hipolit będzie dobrym informatykiem.*
t — *Hipolit jest przystojny.*
Wówczas pierwsze zdanie ma postać:

$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$,

zaś drugie:

$t \rightarrow q$.

Drugie zdanie jest fałszywe, tzn:

$$\begin{array}{ccc} t & \rightarrow & q \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

a zatem $q = 0$. Mamy więc (korzystając ze skróconych tabelek dla koniunkcji i implikacji):

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \wedge & q) & \rightarrow & (r & \vee & s) \\ - & 0 & 0 & 1 & - & - & - \end{array}$$

Pierwsze zdanie zatem jest prawdziwe.
Uwaga:
Podany przykład pokazuje, że na gruncie logiki formalnej abstrahujemy od treści zdań właśnie zastępując stałe pozalogiczne (w tym wypadku są nimi zdania proste) przez zmienne zdaniowe. Jak widzimy, wartości logiczne zdań p, r, s nie są potrzebne do tego, aby ustalić wartość logiczną zdania:
$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$.

2. Które spośród poniższych schematów wnioskowania są formalnie poprawne. Uzasadnij odpowiedź.

a) $\dfrac{p \rightarrow q}{\sim p \rightarrow \sim q}$ b) $\dfrac{p \vee \sim q \quad p}{\sim q}$ c) $\dfrac{p \equiv \sim q \quad \sim p}{q}$

d) $\dfrac{\sim q}{p \vee \sim q}$ e) $\dfrac{p \rightarrow \sim q \quad \sim q}{p}$ f) $\dfrac{\sim (p \wedge q) \quad q}{\sim p}$

Przykład

$$\begin{array}{l} \sim p \vee \sim q \\ q \rightarrow p \\ \hline \sim q \end{array}$$

Schemat jest formalnie poprawny, gdy jego wniosek wynika logicznie z przesłanek; innymi słowy gdy wykluczona jest sytuacja, gdy przesłanki tego schematu byłyby prawdziwe, a jego wniosek fałszywy. Sprawdzanie odbywa się w dwóch krokach. W kroku pierwszym piszemy odpowiadającą schematowi wnioskowania implikację łącząc jego przesłanki za pomocą znaku $\wedge$ i potem łącząc koniunkcję przesłanek z wnioskiem za pomocą znaku $\rightarrow$. W kroku drugim sprawdzamy czy otrzymana w kroku pierw-

szym implikacja jest prawem logiki (tautologią). A zatem:
Krok I:

$$\begin{array}{ll} & (\sim p \vee \sim q) \\ \wedge & \\ & (q \rightarrow p) \\ \rightarrow & \overline{} \\ & \sim q \end{array}$$

Krok II:

$[(\sim$	p	$\vee$	$\sim$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$p)]$	$\rightarrow$	$\sim$	q
0	1	0	0	1	0	1	1	1	**1**	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	**1**	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	**1**	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	**1**	1	0

Przypomnijmy tu, że w praktyce nauczania logiki na lekcjach matematyki (o czym wspominaliśmy wyżej) zwykło się zapisywać tabelki nieco inaczej najpierw wypisując wartości zmiennych, potem wartości negacji zmiennych, potem poszczególne wyrażenia powstałe z połączenia zmiennych lub ich negacji za pomocą funktorów dwuargumentowych, potem wyrażenia bardziej złożone aż do wartości całej badanej formuły. Oczywiście sam sposób zapisywania sprawdzania 0-1 nie ma wpływu na wynik sprawdzania (niech każdy z Was wybierze taki sposób notacji, w jakim czuje się najlepiej). Nasz przykład w tej notacji wygląda następująco:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$q \rightarrow p$	$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow \sim q$
1	1	0	0	0	1	**1**
1	0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

3. Które z poniższych wyrażeń są prawami logiki (tautologiami):
   a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$
   b) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$
   c) $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q)$
   d) $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim (p \rightarrow q)$
   e) $\sim (p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim q)$
   f) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))]$
   g) $[(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)] \rightarrow ((\sim r \vee \sim q) \rightarrow p)$
4. Odtwórz logiczną strukturę poniższych rozumowań (sformułowanych w dość swobodnym języku potocznym), a następnie oceń za pomocą metody 0-1 ich formalną poprawność.
   a) *Rozprawa De Morgana powinna być w katalogu pod literą D lub pod literą M, jednakże brak jej pod literą D. Wobec tego będzie pod literą M.*
   b) *Jeżeli Robert zdecydował się studiować nauki polityczne lub prawo, to musiał rzucić pracę w wytwórni wody kolońskiej. Zatem jeżeli nadal*

tam pracuje i - jak słychać na mieście - studiuje prawo, widać nie zdecydował się na nauki polityczne.

c) *Los obdarza cię najwyżej jednym: albo dostatkiem albo wrażliwością. Przypadł ci znaczny majątek. Zatem na wrażliwość nie masz co liczyć.*

d) *Nie ma tak, że szuka się szczęścia i zarazem się je znajduje. A to oznacza, że go nie szukamy względnie nie znajdujemy.*

e) *W czasie mrozów trzeba ubrać ciepłą kurtkę, natomiast w czasie deszczu, zabrać z domu parasol. Zatem w czasie mrozów nie trzeba zabierać z domu parasola.*

5. Zbadaj za pomocą metody 0 - 1 formalną poprawność następujących wnioskowań:

a) *Jeżeli Jan uczy się pilnie i Jan nie zdał egzaminu, to Jan nie miał szczęścia.*
Jan zdał egzamin i Jan nie uczył się pilnie
Jan miał szczęście.

b) *Karol uczy się logiki, ale Karol jej nie umie.*
Jeżeli Karol nie umie logiki, to Karol nie zda egzaminu.
Jeżeli Karol zda egzamin, to Karol uczy się logiki.

c) *Anastazja jest administratorem lub Anastazja jest ekonomistą.*
Jeżeli Anastazja jest ekonomistą, to umie liczyć.
Jeżeli Anastazja jest nielogiczna, to nie jest administratorem.
Jeżeli Anastazja jest nielogiczna, to nie umie liczyć.

d) *Hipolit studiuje prawo lub administrację.*
Jeżeli Hipolit nie studiuje administracji, to Hipolit będzie adwokatem.
Jeżeli Hipolit studiuje prawo, to Hipolit nie będzie burmistrzem.

e) *Jeżeli podatki są zbyt wysokie, to są nieściągalne lub rujnują gospodarkę.*
Jeżeli gospodarka jest rujnowana przez podatki, to kraj pogrąża się w biedzie.
Jeżeli kraj nie pogrąża się w biedzie, to podatki nie są zbyt wysokie.

f) *Jeżeli podatki nie są wysokie, to gospodarka rozwija się szybko.*
Jeżeli wydatki socjalne są wysokie, to podatki są wysokie.
Jeżeli gospodarka nie rozwija się szybko, to wydatki socjalne nie są wysokie.

g) *Jeżeli byt nie jest jeden, to są co najmniej dwa byty.*
Jeżeli są co najmniej dwa byty, to (między nimi) jest niebyt.
Byt jest jeden.

h) *Jeśli zdanie jest prawdziwe, to musi się zdarzyć to, co zdanie głosi.*
Jeśli zdanie jest fałszywe, to nie może się zdarzyć to, co zdanie głosi.
Zdanie jest prawdziwe lub fałszywe.
Jeśli coś musi się zdarzyć lub coś nie może się zdarzyć, to nie ma wolności w świecie.
Nie ma wolności w świecie.

6. Jaki jest związek między zdaniem *Jeżeli matce przysługuje część urlopu macierzyńskiego po oddaniu dziecka lub urlop macierzyński może wynosić krócej niż osiem tygodni, to jeśli matka zrezygnowała z wychowywania dziecka, to matka nie oddała go innej kobiecie do przysposobienia ani nie oddała go do domu małego dziecka*

a następującym przepisem artykułu 182 kodeksu pracy:

Jeżeli matka rezygnuje z wychowywania dziecka i oddaje je innej osobie w celu przysposobienia lub do domu małego dziecka, nie przysługuje jej część *urlopu macierzyńskiego przypadająca po dniu oddania dziecka, jednakże urlop macierzyński po porodzie nie może wynosić mniej niż 8 tygodni?*

7. Sprawdź, czy poniższe zdania są prawdziwe. W których zadaniach trzeba przyjąć dodatkowe, niewymienione w zadaniu założenia (prawdy matematyczne)?
   a) Jeżeli liczba naturalna n jest liczbą pierwszą, to o ile n jest liczbą złożoną, to n równa się 4.
   b) Jeżeli liczba naturalna n dzieli się przez 3, to stąd, że n nie dzieli się przez 3 wynika, że n dzieli się przez 5.
   c) Jeżeli stąd, że wszystkie boki trójkąta ABC są równe, wynika, że wszystkie kąty trójkąta ABC są równe i trójkąt ABC ma nierówne kąty, to ma on również nierówne boki.
   d) Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta **L** jest równoległa do prostej **M** albo prosta **P** nie jest równoległa do prostej **M**, to albo prosta **L** nie jest równoległa do prostej **M** albo prosta **P** jest równoległa do prostej M.
   e) Jeżeli stąd, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, wynika, że jest ona ciągła w punkcie x_0, to stąd, iż funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, wynika, iż jest ona różniczkowalna w punkcie x_0.
8. Wykaż, że poniższe rozumowania są formalnie poprawne. Co jest źródłem „dziwności” (nieintuicyjności) tych rozumowań?
   a) Rozumowanie przypisywane kalifowi Omarowi, który, według legendy, miał uzasadnić spalenie Biblioteki Aleksandryjskiej w taki oto sposób:
   Książki tej biblioteki są zgodne lub niezgodne z Koranem.
   Jeżeli książki tej biblioteki są zgodne z Koranem, to są zbyteczne.
   Jeżeli książki tej biblioteki są niezgodne z Koranem, to są szkodliwe.
   Jeżeli książki są zbyteczne, to należy je zniszczyć.
   Jeżeli książki są szkodliwe, to należy je zniszczyć.

   Książki tej biblioteki należy zniszczyć.
   b) *Jeżeli zażyjesz aspirynę, to poczujesz się lepiej.*

   Jeżeli rozpuścisz aspirynę w cyjanku potasu i ją zażyjesz, to poczujesz się lepiej.
   c) *Logika jest łatwa i przydatna.*
   Jeżeli logika wymaga myślenia, to logika nie jest łatwa.
   Jeżeli logika nie wymaga myślenia, to logika nie jest przydatna.

   Biologia jest piękna.
   d) *Jeżeli Polska leży nad Oceanem Indyjskim, to w Polsce panuje ciepły klimat.*
   Jeżeli w Polsce panuje ciepły klimat, to w Polsce uprawiany jest pieprz.

   Jeżeli Polska leży nad Oceanem Indyjskim, to w Polsce uprawiany jest pieprz.
9. Wykaż, że:
   a) $\alpha \vee 1 \equiv 1$
   b) $\alpha \vee 0 \equiv \alpha$
   c) $\alpha \wedge 1 \equiv \alpha$
   d) $\alpha \wedge 0 \equiv 0$
10. Ogłoszono konkurs, w którym za każde zdanie prawdziwe, jakie wypowie

uczestnik otrzyma 2 dolary. Poszczególni uczestnicy dość szybko kończyli udział dochodząc do co najwyżej tysiąca dolarów. Podaj sposób, który w oparciu o elementarną znajomość logiki pozwoli na wygranie wielkich pieniędzy bez żadnego wysiłku.

11. Poddaj analizie logicznej zadanie o krokodylu i Egipcjance. Czy ktoś z nich ma rację? (Zadanie to jest szeroko analizowane w książeczce A. Grzegorczyka, *Logika popularna*.

1.2.2. Zagadki

Rycerze i łotrzy

B. Russell mówił o E. Moorze, że to jeden z najbardziej prawdomównych ludzi, jakich kiedykolwiek spotkał. Pewnego razu Russell podczas spotkania zapytał Moore'a: „Czy w ogóle kiedykolwiek skłamałeś? Na co Moore odpowiedział twierdząco. Russell napisał o tym zdarzeniu w następujący sposób: „Sądzę, że było to jedyne kłamstwo, jakie Moore kiedykolwiek wypowiedział".

Istnieje bardzo wyjątkowa wyspa, której mieszkańcami są wyłącznie rycerze i łotrzy. Jak wiadomo rycerze to dobrzy i honorowi ludzie, dlatego zapytani zawsze odpowiadają prawdę, natomiast łotrzy to kanalie i oszuści, którzy zawsze kłamią. Na rozstaju dróg spotykasz mieszkańców wyspy. Czy potrafisz wskazać, która ze spotkanych osób jest rycerzem, a która łotrem?

Zagadka 1. (Tomasz i Artur) Tomasz twierdzi, że Artur jest łotrem, a Artur mówi: *Ani ja, ani Tomasz nie jesteśmy łotrami.*

Przykład - rozwiązanie zagadki

Krok 1: Wypiszmy wszystkie możliwe kombinacje, w których mogą występować napotkane osoby. Oczywiście będzie ich 2^n, gdzie n to liczba spotkanych osób. W tym przypadku mamy cztery kombinacje:

I	II	III	IV
Tomasz = Rycerz	Tomasz = Łotr	Tomasz = Rycerz	Tomasz = Łotr
Artur = Rycerz	Artur = Rycerz	Artur = Łotr	Artur = Łotr

Krok 2: Sprawdźmy po kolei wszystkie kombinacje.

— Sytuacja I: Pierwszą sytuację odrzucamy ponieważ przy założeniu, że Tomasz jest rycerzem, nieprawdziwe jest stwierdzenie, że Artur jest łotrem, a rycerz zawsze mówi prawdę.

— Sytuacja II: W drugiej sytuacji, przy założeniu, że Tomasz jest łotrem, pasuje wypowiedź, że Artur jest łotrem, ponieważ jest fałszywa, a jak wiadomo łotr zawsze kłamie. Ale, przy założeniu, że Artur jest rycerzem, do tej sytuacji nie pasuje stwierdzenie *Ani ja, ani Tomasz nie jesteśmy łotrami*, które jest fałszywe, a przecież rycerz zawsze mówi prawdę.

— Sytuacja III: Stwierdzenie Tomasza: *Artur jest łotrem*, przy założeniu, że jest on rycerzem jest prawdziwe. Do tej sytuacji pasuje również stwierdzenie Artura, że żaden z nich nie jest łotrem, które w oczywisty sposób jest fałszywe i takie powinno być, skoro Artur jest łotrem.

Krok 3: Badanie sytuacji IV nie jest potrzebne. Możemy stwierdzić jednoznacznie, że zachodzi sytuacja przedstawiona w kolumnie III.

Odpowiedź: Tomasz jest rycerzem, a Artur jest łotrem.

Zagadka 2. (Łukasz i Bartosz) Łukasz oznajmia: *Obaj jesteśmy rycerzami lub obaj jesteśmy łotrami*, a Bartosz: *Ja i Łukasz jesteśmy tacy sami.*

Zagadka 3. (Wacław i Olaf) Wacław powiedział Ci: *Dokładnie jeden z nas jest rycerzem.* A Olaf stwierdził, że Wacław jest łotrem.

Zagadka 4. (Zbyszek i Edward) Zbyszek powiedział Ci: *Edward jest rycerzem lub ja jestem rycerzem.* A Edward stwierdził: *Zbyszek może twierdzić, że ja jestem łotrem.*

Zagadka 5. (Olgierd i Marek) Olgierd powiedział: *Obydwaj jesteśmy rycerzami lub obydwaj jesteśmy łotrami.* A Marek stwierdził: *Olgierd będzie mówił, że ja jestem łotrem.*

Zagadka 6. (Oswald i Atanazy) Oswald powiedział Ci: *Tylko jeden z nas jest rycerzem.* Natomiast Atanazy stwierdził: *Oswald może twierdzić, że ja jestem rycerzem.*

Zagadka 7. (Edmund i Ryszard) Edmund powiedział, że Ryszard jest łotrem. A Ryszard stwierdził: „Edmund i ja nie jesteśmy tym samym".

Zagadka 8. (Alojzy i Adolf) Alojzy powiedział Ci, że tylko łotr mógłby powiedzieć, że Adolf jest łotrem, podczas gdy Adolf stwierdził: *Alojzy i ja jesteśmy różni od siebie.*

Zagadka 9. (Adam i Piotr) Adam powiedział: *Mogę powiedzieć Ci, że Piotr jest rycerzem.* Piotr stwierdził, że Adam jest łotrem.

Zagadka 10. (Krzysztof i Wojciech) Krzysztof powiedział: *Ja i Wojciech jesteśmy obydwaj rycerzami lub obydwaj jesteśmy łotrami.* A Wojtek stwierdził: *Krzysztof i ja jesteśmy tacy sami.*

Zagadka 11. (Erazm, Rafał, Maciej) Erazm powiedział, że Rafał jest łotrem. Rafał powiedział Ci, że nieprawdą jest, że Maciej jest łotrem, a Maciej stwierdził: *Ja jestem rycerzem lub Erazm jest rycerzem.*

Zagadka 12. (Adrian, Tomasz i Jerzy) Adrian powiedział: *Ja i Andrzej, obydwaj jesteśmy rycerzami lub obydwaj jesteśmy łotrami.* Andrzej powiedział: *Ja i Jerzy jesteśmy rycerzami.* A Jerzy stwierdził: *Mogę przyznać, że Adrian jest łotrem.*

Zagadka 13. (Zbyszek, Emil i Marian) Zbyszek powiedział: *Emil jest łotrem.* Emil powiedział: *Marian i ja jesteśmy obydwaj rycerzami lub obydwaj jesteśmy łotrami.* Marian stwierdził, że Emil jest łotrem.

Zagadka 14. (Andrzej, Edward i Jan) Andrzej powiedział, że ani Edward, ani Jan nie są rycerzami. Edward powiedział, że Andrzej i Jan są rycerzami. Jan stwierdził, że Andrzej jest rycerzem lub Edward jest łotrem.

Zagadka 15. (Ernest, Henryk i Arnold) Ernest powiedział: *Tylko jedno z dwojga jest prawdą: Arnold jest łotrem lub ja jestem rycerzem.* Henryk powiedział: *Ernest może twierdzić, że ja jestem łotrem". Arnold stwierdził natomiast: „Ani Ernest, ani Henryk nie są rycerzami.*

Zagadka 16. (Dariusz, Bogusław, Ireneusz i Arkadiusz) Dariusz stwierdził, że tylko jeden z dwóch - Bogusław lub Ireneusz - jest rycerzem.

Bogusław powiedział, że Ireneusz i Arkadiusz są obydwaj rycerzami lub obydwaj są łotrami. Ireneusz powiedział: *Ja i Dariusz jesteśmy rycerzami.* Arkadiusz powiedział, że Dariusz i Bogusław są tacy sami.

Zagadka 17. (Eryk, Ignacy, Augustyn, Alfons) Eryk powiedział: *Augustyn i Alfons są rycerzami.* Ignacy powiedział, że Augustyn jest rycerzem, a Alfons jest łotrem. Augustyn powiedział: *Ani Ignacy, ani Alfons nie są łotrami.* Alfons powiedział, że ani Eryk, ani Ignacy nie są łotrami.

Zagadka 18. (Piotr, Artur, Paweł i Robert) Piotr powiedział: *Ja i Robert jesteśmy obydwaj rycerzami lub obydwaj jesteśmy łotrami.* Artur powiedział: *Wiem, że Piotr jest łotrem i że Robert jest rycerzem.* Paweł stwierdził: *Ja i Piotr jesteśmy rycerzami.* Robert powiedział, że tylko łotr mógłby powiedzieć, że Paweł jest łotrem.

Zagadka 19. (Zygmunt, Alfred, Ambroży, Arkadiusz) Zygmunt powiedział, że Arkadiusz jest łotrem. Alfred i Ambroży powiedzieli, że łotrem jest Zygmunt. Arkadiusz stwierdził: *Jeśli chodzi o Alfreda i Ambrożego, to jeden z nich jest rycerzem.*

Zagadka 20. (Anastazy, Paweł, Anzelm, Edward i Zenon) Anastazy powiedział, że Zenon może powiedzieć, że Paweł jest rycerzem. Paweł stwierdził: *Edward i ja nie jesteśmy tacy sami.* Anzelm powiedział, że Edward jest łotrem. Edward stwierdził: *Dokładnie jedno z dwojga jest prawdą: albo ja jestem rycerzem, albo Zenon jest łotrem.* Zenon powiedział, że Anastazy jest łotrem lub Anzelm jest łotrem.

Miłość i logika

Czy logik nie powinien wiedzieć, którą dziewczynę kocha bez zamykania się w pokoju z kartką i ołówkiem i logicznego wywodzenia Miłości swego życia? Wyobraźmy sobie, że na pytanie dziewczyny o to, czy ją kocha odpowiada „Chwileczkę, muszę poczynić odpowiednie obliczenia", po czym zamyka się w pokoju na kilka godzin i przeprowadziwszy odpowiednie wnioskowania wychodzi i oświadcza: „Tak, okazuje się - niezawodnie - że Cię kocham - ***niezawodnie****". Wedle anegdoty, Leibniz rozważając, czy poślubić pewną damę, usiadł nad kartką papieru i sporządził dwie listy - listę zysków i listę strat. Kiedy ta druga okazała się dłuższa, postanowił jej nie poślubiać.*

Zagadka 1. (Tomasz, Klara, Matylda) Załóżmy, że następujące dwa zdania są prawdziwe:
(1) Tomasz kocha Klarę lub Tomasz kocha Matyldę.
(2) Jeżeli Tomasz kocha Klarę, to kocha Matyldę.
Czy ze zdań (1) (2) wynika, że Tomasz kocha Klarę czy wynika z nich, że kocha Matyldę?

Rozwiązanie (I sposób): Ze zdań (1) (2) nie wynika, że Tomasz kocha Klarę, lecz wynika, że Tomasz kocha Matyldę. Wniosek opiera się na następującym rozumowaniu. Tomasz kocha Klarę lub jej nie kocha. Jeżeli Tomasz nie kocha Klary, to na mocy (1) Matylda jest dziewczyną, którą kocha Tomasz (na mocy założenia, że Tomasz kocha co najmniej jedną z nich). Z drugiej strony, jeżeli Tomasz kocha Klarę, to na mocy (2), kocha również Matyldę.

Zatem w każdym przypadku (czy kocha Klarę czy jej nie kocha) otrzymujemy wniosek, zgodnie z którym Tomasz kocha Matyldę.

Rozwiązanie (II sposób - „mechaniczny") p — *Tomasz kocha Klarę.*
q — *Tomasz kocha Matyldę.*
Piszemy w jednym wierszu formy zdaniowe powstałe przez zastąpienie zdań przez zmienne zdaniowe. Podpisujemy wszystkie możliwe układy wartości logicznych pod p i pod q. Otrzymamy tabele:

$p \vee q$	$p \to q$
1 1 1	1 1 1
0 1 1	0 1 1
~~1 1 0~~	~~1 0 0~~
~~0 0 0~~	~~0 1 0~~

Ponieważ oba zdania są prawdziwe, nie może zachodzić sytuacja opisana w wierszu trzecim (pierwsze zdanie fałszywe) i w wierszu czwartym (drugie zdanie fałszywe). Wykreślamy te wiersze. W obu wierszach pozostałych po wykreśleniu, prawdziwe jest q, a zatem *Tomasz kocha Matyldę.*

Zagadka 2. (Wacław, Klara, Arleta) Załóżmy, że ktoś pyta Wacława: *Czy jest prawdą, że jeżeli kochasz Klarę, to kochasz też Arletę?* Wacław odpowiada: *Jeżeli jest to prawda, to kocham Klarę.*
Czy wynika stąd, że Wacław kocha Klarę, i czy wynika, że Wacław kocha Arletę?

Zagadka 3. (Tomasz, Klara, Matylda) Załóżmy, że Tomasz poznał dwie dziewczyny: Klarę i Matyldę. Kolega Tomasza zapytał go: *Czy prawdą jest, że jeżeli kochasz Klarę, to kochasz też Matyldę?*. Tomasz odpowiedział: *Jeżeli jest to prawda, to kocham Klarę, a jeśli kocham Klarę, to jest to prawda.*
Którą z poznanych dziewczyn Tomasz na pewno kocha?

Zagadka 4. (Wacław, Klara, Arleta, Matylda) Załóżmy, następujące zdania: (1) Wacław kocha co najmniej jedną z trzech dziewczyn (Klara, Arleta, Matylda). (2) Jeżeli Wacław kocha Klarę, lecz nie kocha Matyldy, to kocha również Arletę. (3) Wacław kocha obie dziewczyny: Arletę i Matyldę lub żadnej z nich nie kocha. (4) Jeżeli Wacław kocha Matyldę, to kocha również Klarę.
Którą z dziewczyn kocha Wacław?

Zagadka 5. (Wacław, Klara, Matylda, Zenobia) . Wacław pytany przez dziewczęta, którą z nich kocha, odpowiada, że prawdziwe są następujące dwa zdania: (1) Jeżeli kocham Klarę lub Matyldę, to kocham i Zenobię. (2) Nie jest tak, że jeżeli kocham Klarę, to nie kocham Zenobii. Na czym polega taktowność Wacława?

Zagadka 6. (Tomasz, Klara, Arleta) Załóżmy, że Tomasz jest rycerzem lub łotrem i wygłasza następujące dwa zdania: (1) *Kocham Klarę.* (2) *Jeżeli kocham Klarę, to kocham też Arletę.*
Czy Tomasz jest rycerzem czy łotrem?

Czy na tej wyspie jest złoto?

Zagadki z grupy „Miłość i logika” były związane z teorią dotyczą zdań warunkowych, czyli zdaniami postaci: „Jeżeli p, to q”. Zagadki, które teraz przedstawiamy, wiążą się ze zdaniami równoważnymi, czyli zdaniami postaci: „p wtedy i tylko wtedy, gdy q”.

Zagadka 1. Na pewniej wyspie zamieszkanej przez rycerzy i łotrów rozeszła się pogłoska, że zakopano na niej złoto. Przybywasz na tę wyspę i pytasz jednego z tubylców A, czy jest na niej złoto. Odpowiada on w następujący sposób: „Na tej wyspie jest złoto wtedy i tylko wtedy, gdy ja jestem rycerzem”. (a) Czy można ustalić, czy A jest rycerzem czy łotrem? (b) Czy można ustalić, czy na tej wyspie jest złoto?

Rozwiązanie: Nie można ustalić, czy mówiący jest rycerzem, czy łotrem, ale na tej wyspie na pewno jest złoto.

Przede wszystkim zachodzi następująca równoważność: Jeżeli mówiący (który jest rycerzem lub łotrem) wygłasza zdanie: „Jestem rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy p”, to p musi być prawdziwe (niezależnie od tego, czy mówiący jest rycerzem czy łotrem).

Dla zrozumienia tego, załóżmy, że k jest równoważne p. Niech teraz mówiący będzie rycerzem. W takim wypadku k jest rzeczywiście równoważne p, a więc k jest prawdziwe. Kiedy natomiast mówiący jest łotrem, wówczas zdanie wypowiedziane przez niego jest fałszywe, a więc p nie jest równoważne k. Skoro jest on łotrem, k jest fałszywe. Ponieważ p nie jest równoważne fałszywemu zdaniu k, to p musi być prawdziwe (jeśli byłoby fałszywe, byłoby równoważne k). Więc niezależnie od tego czy mówiący jest rycerzem, czy łotrem na wyspie z pewnością jest złoto.

Zagadka 2. Załóżmy, że zamiast czekać aż A sam udzieli ci tej informacji, zadałeś mu pytanie: „Czy zdanie, że jesteś rycerzem, jest równoważne zdaniu, że na tej wyspie jest złoto?” Gdyby odpowiedział „tak”, zadanie to sprowadzałoby się do poprzedniego zadania. Załóżmy, że odpowiedział „nie”. Czy mógłbyś wówczas powiedzieć, czy jest na tej wyspie złoto czy go nie ma?

Zagadka 3. Wyobraź sobie, że odkryłeś trzy sąsiadujące ze sobą wyspy - A, B, C. Wiedziałeś, że co najmniej na jednej z nich zostało zakopane złoto, lecz nie wiedziałeś na której. Wyspy B i C były nie zamieszkane, na wyspie A natomiast mieszkali rycerze i łotrzy, a zachodziła też możliwość, że mieszkają na niej również zwykli ludzie, ale nie byłeś pewien czy to prawda.

Tak się szczęśliwie złożyło, że znalazłeś mapę wyspy pozostawioną przez kapitana Martsona - pirata, który zakopał złoto. Informacje na mapie były zaszyfrowane. Bez większych trudności złamałeś szyfr. Na mapie zapisane były dwa zdania: (a) Na wyspie A nie ma złota. (b) Jeżeli na wyspie A są jacyś zwykli ludzie, to na dwóch wyspach jest złoto.

Natychmiast udałeś się na wyspę A. Wiedziałeś, że tubylcy wiedzą tam o wszystkim, co dotyczy złota. Udałeś się do króla wyspy, który pozwolił zadać tylko jedno pytanie dowolnemu tubylcowi. W żaden sposób nie możesz się dowiedzieć, czy ów tubylec jest rycerzem, łotrem czy zwykłym człowiekiem.

Zadaj tubylcowi takie pytanie, byś po usłyszeniu odpowiedzi na nie mógł wskazać jedną z wysp i mieć pewność, że jest na niej złoto.

Zagadka 4. Wyobraź sobie, że odwiedziłeś wyspę rycerzy, łotrów i zwykłych ludzi. Rozeszła się pogłoska, że jest na niej złoto, chciałeś więc ustalić, czy to prawda. Król wyspy, który był rycerzem, przedstawił cię trzem tubylcom i powiedział, że co najwyżej jeden z nich jest zwykłym człowiekiem. Pozwolono Ci zadać dowolnemu z nich - wedle twojego wyboru - dwa pytania, na które można odpowiedzieć „tak" lub „nie".

Czy jest jakiś sposób, by ustalić za pomocą dwóch pytań, czy na tej wyspie jest złoto?

Damy i tygrysy

Czasami logika ratuje życie...

Zagadki o damach i tygrysach dobrze ilustrują metodę dowodu w oparciu o sprowadzanie do sprzeczności. W prezentowanym rozwiązaniu warto zwrócić uwagę na fakt, że rozwiązując jakieś zagadnienie dotyczące rzeczywistości (tu jest to właściwy, rozsądny, a nie przypadkowy, wybór pokoju gwarantujący przeżycie więźniowi) korzystamy z dwojakiej wiedzy: jedna dotyczy świata, a więc tego jakie prawidłowości nim rządzą (to wiedza o zawartości pokojów, treści napisów czy regułach odczytywania tych napisów) — druga zaś jest wiedzą o charakterze logicznym, dotycząca samego sposobu dowodzenia (redukcja do absurdu) oraz dopuszczalnych operacji logicznych. Jeśli ktoś chciałby poczytać o samym pojęciu dowodu, polecamy piękną książeczkę W. Pogorzelskiego, J. Słupeckiego *O dowodzie matematycznym.*

Są dwa pokoje, w każdym może być dama lub tygrys. Więzień ma wybierać spośród nich: jeśli wybierze pokój z damą, będzie wolny, a jeśli z tygrysem, to... . Żeby wybór nie był przypadkowy, na drzwiach każdego z pokojów umieszczono napisy, przy czym jeśli dama jest w pierwszym pokoju, napis na jego drzwiach jest prawdziwy, a jeśli w tym pokoju jest tygrys, napis na jego drzwiach jest fałszywy. Dla drugiego pokoju jest odwrotnie. Przy tym nie ma pokojów pustych i w żadnym z pokojów naraz nie przebywa dama i tygrys. Który pokój powinien wybrać więzień?

Oto kilka prostych zadań o damach i tygrysach. Zadania a), b), c), d) mają te same reguły i to samo polecenie, a różnią się jedynie napisami na drzwiach pokoi; oto napisy:

	Pokój numer I	**Pokój numer II**
Zadanie a)	W obu pokojach są damy.	W obu pokojach są damy.
Zadanie b)	W co najmniej jednym pokoju jest dama.	Dama jest w I pokoju.
Zadanie c)	Nie ma znaczenia, który pokój wybierzesz.	Dama jest w I pokoju.
Zadanie d)	Nie jest bez znaczenia, który pokój wybierzesz.	Dama jest w I pokoju.

Zadanie e) jest ciekawsze. Otóż, nasz więzień przyszedłszy pod drzwi pokojów nie znalazł na nich napisów. Zaniepokoiwszy się nieco zapytał zarządzającego strażnika „Gdzie są napisy?” Strażnik odpowiedział: „Za prędko przyszedłeś! Nie zdążyłem ich jeszcze zawiesić!” „Jak więc sobie wyobrażasz mój wybór?” - rzekł zaniepokojony już na serio więzień. Strażnik popatrzył na napisy i powiedział: „Właściwie nie muszę ich wieszać! Jeśli tylko odrobię pomyślisz, będziesz wiedział, który pokój wybrać!”. Pamiętać należy, że reguły gry są te same, co w poprzednich zadaniach. Oto napisy:

W tym pokoju jest tygrys.
W obu pokojach są tygrysy.

Jeśli komuś przeszkadza treść zadania (np. dlatego, że w złym świetle stawia ono tygrysy), możemy ją zastąpić np. przez taką oto treść (prawniczą):

Paulina jest matką Adolfa albo Ramona jest matką Adolfa. Podobnie, Paulina jest matką Benona albo Ramona jest matką Benona. Znaleziono dwa dokumenty o takiej samej treści stwierdzające, że Paulina jest matką Adolfa i Benona. Jednakże każdy z tych dokumentów pochodzi z innego źródła i inne są reguły jego interpretacji. Mianowicie, jeżeli Paulina jest matką Adolfa, to zdanie w I dokumencie jest prawdziwe, a jeśli Ramona jest matką Adolfa, to zdanie w I dokumencie jest fałszywe. Dla drugiego dokumentu jest tak, że jeśli Ramona jest matką Benona, to zdanie z tym dokumencie jest prawdziwe, a jeśli Paulina jest matką Benona to zdanie to jest fałszywe. Znajdź matkę Adolfa i matkę Benona.

Rozwiązanie zadania a) (w wersji dla tygrysów) bez symboli: Załóżmy, że dama jest w pierwszym pokoju. Wtedy napis na jego drzwiach jest prawdziwy, z czego wynika, że dama jest i w drugim pokoju; ale wtedy napis na drzwiach drugiego pokoju winien być fałszywy. Ale oba napisy są takie same, a zatem ten sam napis musiałby być prawdziwy i fałszywy zarazem. Ale tak w logice klasycznej być nie może; stąd wniosek, że w pierwszym pokoju na pewno nie ma damy, a zatem musi tam być tygrys. Czy zatem warto wchodzić do pokoju drugiego? Odpowiedź: warto! Załóżmy bowiem, że w drugim pokoju jest tygrys, wtedy zdanie na drzwiach tego pokoju, głoszące, że w obu pokojach są damy powinno być prawdziwe, z czego wynikałby wniosek, że w drugim pokoju naraz jest dama i tygrys, a to jest sprzeczne z warunkami zadania. A zatem w pierwszym pokoju jest tygrys, a w drugim dama.

Rozwiązanie zadania a) sformalizowane:

Zastosujmy dowód nie wprost, czyli przez sprowadzenie do sprzeczności (*reductio ad absurdum*); reguła sprowadzania do sprzeczności głosi, że jeśli jakieś zdanie prowadzi do sprzeczności (tzn. uznania, że określony stan rzeczy zachodzi i nie zachodzi zarazem), to zdanie to jest fałszywe (czyli prawdziwe jest wtedy jego zaprzeczenie). Możemy to symbolicznie zapisać:

$$\frac{Z \to (W \wedge \sim W)}{\sim Z}$$

Zauważmy, że regułę tę, która jest podstawą dla większości dowodów twierdzeń w matematyce, zastosowaliśmy również w powyższym nieformalnym rozwiązaniu zagadki. Reguła ta leży też u podstaw wielu rozumowań przeprowadzanych np. przez starożytnych filozofów greckich.

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:
D(I) - dama jest w pierwszym pokoju; T(I) - tygrys jest w pierwszym pokoju; D(II)- dama jest w drugim pokoju; T(II) - tygrys jest w drugim pokoju; 1(I) - zdanie na drzwiach pierwszego pokoju jest prawdziwe; 0(I) - zdanie na drzwiach I pokoju jest fałszywe, itd. W oznaczeniach dopuściliśmy się pewnego uproszczenia, gdyż „I" („II") oznacza i numer pokoju i napis na drzwiach pokoju. Praktycznie jednak nie ma możliwości pomyłki – wszak pokoje nie mogą być prawdziwe, a w napisach nie mogą znajdować się damy ani tygrysy. Choć oznaczenia powyższe sugerują, że wyszliśmy poza klasyczny rachunek zdań, to jednak tak naprawdę wcale to nie nastąpiło. Jak zobaczymy niżej, cała wiedza, która jest potrzebna do rozwiązania zadania, to znajomość reguły redukcji do absurdu i tabelek 0-1. Wówczas zasady interpretacji napisów przyjmą postać następujących reguł:

Reguła R1:	Reguła R2:	Reguła R3:	Reguła R4:
$\dfrac{\text{D(I)}}{\text{1(I)}}$	$\dfrac{\text{T(I)}}{\text{0(I)}}$	$\dfrac{\text{T(II)}}{\text{1(II)}}$	$\dfrac{\text{D(II)}}{\text{0(II)}}$

a stwierdzenia, że nie ma pokojów pustych oraz że w żadnym pokoju nie przebywa naraz tygrys i dama (pokój „przepełniony") przyjmują odpowiednio postać:
$D(I) \vee T(I)$, $D(II) \vee T(II)$ oraz $\sim (D(I) \wedge T(I))$ i $\sim (D(II) \wedge T(II))$

Teraz możemy już przeprowadzić pełny dowód rozwiązania zagadki; zaczniemy od przyjęcia założenia i spróbujemy wykazać, że prowadzi ono do sprzeczności.

1.	$D(I)$	założenie
2.	$1(I)$	R1:1
3.	$1(I) \equiv (D(I) \wedge D(II))$	klasyczna definicja prawdy
4.	$D(I) \wedge D(II)$	3,4, tabelka równoważności
5.	$D(II)$	4, tabelka koniunkcji
6.	$0(II)$	R4:5
7.	$0(II) \equiv \sim (D(I) \wedge D(II))$	klasyczna definicja fałszu
8.	$\sim (D(I) \wedge D(II))$	6,7, tabelka równoważności
	Sprzeczność: 4, 8	
9.	$\sim D(I)$	Redukcja do absurdu: 1, 4, 8
10.	$D(I) \vee T(I)$	„Nie ma pokojów pustych"
11.	T(I)	9, 10, tabelka alternatywy

Udowodniliśmy, że w pierwszym pokoju jest tygrys. Teraz druga część dowodu:

1.	$T(II)$	założenie
2.	$1(II)$	R3:1
3.	$1(II) \equiv (D(I) \wedge D(II))$	klasyczna definicja prawdy
4.	$D(I) \wedge D(II)$	2, 3, tabelka równoważności
5.	$D(II)$	4, tabelka koniunkcji
6.	$D(II) \wedge T(II)$	1, 6, tabelka koniunkcji
7.	$\sim (D(II) \wedge T(II))$	„Nie ma pokojów przepełnionych”
	Sprzeczność:6, 7	
8.	$\sim T(II)$	Redukcja do absurdu: 1, 6,7
9.	$D(II) \vee T(II)$	„Nie ma pokojów pustych”
10.	$D(II)$	8, 9, tabelka alternatywy

Dowiedliśmy w sposób sformalizowany twierdzenia, że przy napisach podanych na drzwiach pokojów i danych regułach ich interpretowania, tygrys jest w pierwszym pokoju, a dama w drugim. Dowód sformalizowany jest „dość długi i nudny”, ale jest to cena za jego precyzję i przejrzystość; w takim dowodzie każde przejście jest dokładnie opisane, podczas gdy w wywodzie słownym trzeba się sporo domyślać.

1.3. Błędy, błędy, błędy...

Błędy są *ciemną stroną mocy*, z którą walczą szlachetni rycerze logiki. A świat ludzkiej mowy, komunikacji i ludzkiego myślenia pełen jest błędów. Można je podzielić z grubsza na te, które dotyczą używania języka w komunikacji oraz te, które dotyczą wyprowadzania wniosków z tego, co już wiemy; dlatego najpierw omówimy błędy w słownym wyrażaniu myśli, a potem błędy w rozumowaniach.

1.3.1. Błędy związane ze słownym wyrażaniem myśli

Logika języka bada język w aspekcie sprawności komunikowania się. Jeśli ta sprawność (ekonomiczność i skuteczność) komunikacji zostaje naruszona, wtedy mówimy o błędach w słownym wyrażaniu myśli. Przyczyny błędów mogą być rozmaite. Jedne mogą pochodzić stąd, iż pewne charakterystyczne cechy języka naturalnego, które służyć mają poprawieniu ekonomii mówienia, niekiedy stają się powodem nieporozumień. Przyczyną innych jest to, że nie dość starannie mówimy lub myślimy. Błędy związane ze słownym wyrażaniem myśli można zatem podzielić na dwie zasadnicze grupy:
— wadliwości spowodowane nieuwzględnieniem charakterystycznych cech języka naturalnego
— wadliwości wynikające z niestaranności mówienia i myślenia.

Wśród wadliwości pierwszego rodzaju odróżniamy błędy związane z wieloznacznością oraz błędy związane z nieostrością zakresów i niewyraźnością treści. Sama wieloznaczność wyrazu, tzn. fakt, że jedno słowo ma więcej niż jedno znaczenie, nie jest błędem w słownym wyrażaniu myśli, lecz podstawową cechą języka naturalnego. Dzięki niej słowniki języka naturalnego mogą zawierać mniej słów niż gdyby wszystkie słowa były jednoznaczne. Ona też jest przejawem „ducha języka", w niej wyraża się jego historia oraz sieci powiązań myślowych charakterystyczne dla danej kultury. Wieloznaczność zaczyna być groźna, gdy prowadzi do nieporozumień, tzn. gdy każdy z uczestników np. dyskusji ma na myśli inne znaczenie wyrazu. Wówczas możemy mieć do czynienia ze sporem słownym, czyli logomachią (gr. *logomachia* — walka o słowa); np. każdy z uczestników dyskusji używa słowa „miłość" w innym znaczeniu. Może też się zdarzyć, że ta sama osoba używa danego słowa w różnych znaczeniach, nie zdając sobie z tego sprawy. Określone słowo może więc być wieloznaczne potencjalnie lub aktualnie. Wyraz jest potencjalnie wieloznaczny, gdy umieszczony w jakiejś wypowiedzi złożonej nie powoduje różnych sposobów rozumienia tej wypowiedzi. Ten rodzaj wieloznaczności zwykle nie jest niebezpieczny. Zaburzenia w komunikacji powoduje natomiast wieloznaczność aktualna polegająca na tym, że umieszczenie wyrazu potencjalnie wieloznacznego w pewnej wypowiedzi powoduje wieloznaczność tej wypowiedzi. Na przykład wyraz „zamek" jest potencjalnie wieloznaczny, gdy jest umieszczony w kontekście „Klucz do zamka typu Gerda jest trudny do podrobienia", a aktualnie wieloznaczny w kontekście „Jan okazyjnie nabył zamek".

Wieloznaczne mogą być nie tylko słowa, ale i wyrażenia złożone. Wieloznaczność wyrazów może być źródłem nieporozumień szczególnie, gdy mamy do czynienia z nazwami abstrakcyjnymi (np. „miłość", „sprawiedliwość", „praworządność"), natomiast wieloznaczność wyrażeń złożonych jest niebezpieczna, gdy dotyczy zdań złożonych, zdania bowiem są nośnikami prawdy. Podstawowym błędem tego rodzaju jest amfibolia (gr. *amfibolos* — dwuznaczny).

Definicja 8. *Amfibolia jest to wieloznaczność wyrażenia złożonego spowodowana wadliwą składnią.*

Przykłady: „Jan zakopał skarb wraz z żoną i teściową" albo „Skazano Jana i Piotra lub Jakuba".

Przyczyny amfibolii mogą być między innymi następujące:
— niewłaściwe umieszczenie (lub brak) znaków interpunkcji (np. „Przeczytać książkę trzy razy przepisać"),
— uszeregowanie poszczególnych wyrazów (np. „Kot wujka Jana pożarł sikorkę", „Samochód Jana wyprzedza samochód Piotra"),
— specjalnie dobrana składnia (np. „Jan kupił dom wraz z koleżanką"),
— akcent, intonację, itd. (np. „Kant był wielkim (?) filozofem", „Kant był wielkim (!) filozofem", „Kant był wielkim filozofem (?)"); przy cytowaniu odpowiednie akcentowanie lub podkreślanie może zupełnie zmieniać sens wypowiedzi cytowanej.

Szczególną formą amfibolii jest elipsa (gr. *elleipsis* — brak)

Definicja 9. *Elipsa jest to wieloznaczność wyrażenia złożonego polegająca na 'wypadnięciu' części zdania.*

Np. „Jan roztrwonił majątek swój i część żony".

Częstym powodem wieloznaczności wyrażeń złożonych jest użycie w nich wyrażeń okazjonalnych (takich wyrażeń, których znaczenie zależy od kontekstu, w jakim zostały użyte), takich jak zaimki osobowe („Świadek Kowalski skończył odpowiadać na pytania prokuratora. Potem on powiedział...”), zaimki wskazujące („Po bitwie, w której Cezar pobił Pompejusza, wódz ten udał się do Egiptu”) lub słowami takimi jak ‘który’, ‘jaki’ („Dziadek Jana Kowalskiego, który jest znany sądowi...”, „Jadę samochodem Karola, który w tym miesiącu miał już trzy wypadki”). Z wieloznacznością związany jest jeszcze jeden typ błędu, a mianowicie błąd ekwiwokacji (łac. *equus* — równy, *vocare* — nazywać). Ekwiwokację można uznać nie tylko za błąd w słownym wyrażaniu myśli, ale i za błąd rozumowania (w klasyfikacji błędów rozumowań można znaleźć określenie jej jako błędu *quaternio terminorum* (błędu czwartego terminu).

Definicja 10. *Ekwiwokacja jest to błąd w rozumowaniu wynikający z wadliwego formułowania myśli taki, że wyraz potencjalnie wieloznaczny użyty jest w jakimś rozumowaniu co najmniej dwa razy, za każdym razem w innym znaczeniu, wtedy gdy powinien występować w jednym znaczeniu.*

Przykłady ekwiwokacji:

Każde małżeństwo jest umową.
Niektóre małżeństwa mają dzieci.
___
Niektóre umowy mają dzieci.

Wyrazem potencjalnie wieloznacznym jest „małżeństwo”, raz występuje jako nazwa pewnego typu umowy cywilnoprawnej, drugi raz jako nazwa pary osób różnej płci zdolnych do posiadania potomstwa. Ekwiwokacja może być spowodowana także przez pomieszanie supozycji, w których pojawia się wyraz:

Cnota jest wyrazem wieloznacznym.
Należy unikać wyrazów wieloznacznych.
___
Należy unikać cnoty.

Wyraz „cnota” (sprawność moralna) w pierwszej przesłance występuje w supozycji materialnej, podczas gdy we wniosku w supozycji zwykłej (prostej).

Drugą z charakterystycznych cech języka naturalnego jest występowanie w nim nazw o nieostrym zakresie lub niewyraźnej treści.

Definicja 11. *Nazwa ma nieostry zakres wtedy, gdy istnieją przedmioty, co do których nie potrafimy rozstrzygnąć czy należą one do zakresu tej nazwy, czy też nie.*

Przykładem nazwy o zakresie nieostrym jest nazwa „młody” (oprócz osobników „na pewno” młodych, takich jak trzylatki, i osobników „na pewno nie-młodych, jak pięćdziesięciolatkowie”) istnieją osobniki bardziej młode lub mniej młode, które jedni uznają za młodych, inni za nie-młodych, np. dwudziestolatkowie, dwudziestojednolatkowie. Użycie w sposób nieświadomy terminu o nieostrym zakresie może prowadzić do nierozstrzygalności twierdzeń, w których takie wyrazy zostały użyte lub do kontrowersji w ocenie wartości logicznej takich twierdzeń. Np. zdanie „Jan jest łysy” może zostać przez Zofię uznane za prawdziwe (bo Jan ma 545 włosów na głowie, a w rodzinie Zofii wszyscy mężczyźni charakteryzują się wyjątkowo bujną czupryną), natomiast to samo zdanie Katarzyna uzna za fałszywe (mężczyźni w rodzinie Katarzyny są łysi „jak kolano”).

Definicja 12. *Nazwa ma treść niewyraźną, gdy nie można wskazać takiego zespołu cech, które łącznie przysługują wszystkim jej desygnatom.*

Powiemy, że wyraz „kwadrat” ma treść wyraźną, bo każdy jego desygnat ma cechy: „prostokątność” i „równoboczność”. Wyraz „stół” ma treść niewyraźną, bo nie można wskazać takich cech, żeby wszystkie desygnaty tej nazwy je posiadały (nie jest to ani posiadanie nóg, ani posiadanie płaskiej, równoległej do podłoża powierzchni. Użycie tego rodzaju nazw może prowadzić do podobnych skutków jak użycie nazwy o nieostrym zakresie.

Wadliwości niestarannego używania języka mogą być następujące:

1) Błąd polegający na tym, że używa się wyrażeń, które wprawdzie samemu się rozumie, ale które są dla słuchacza niezrozumiałe i obce.
2) Błąd polegający na tym, że nie potrafimy dokładnie oddać swoich myśli, a to, co mówimy nie odpowiada dokładnie temu, co myślimy (niejasność myślenia)
   Przykład I
   > „Z definicjami ludzie się rodzą; swe istoty muszą tworzyć. Definicja mówi ci, kim jesteś, podczas gdy istota wabi cię tym, czym jeszcze nie jesteś, ale stać się możesz. Parweniusze byli ludźmi zajadle poszukującymi swej istoty. Gonili za istotą, bowiem od początku odmówiono im definicji. Łatwo było wprawdzie pomówić ich o to, że własna przyrodzona niechęć do zagrzewania miejsca pozbawiła ich definicji, i oskarżyć o bezprawne przekraczanie granic. Wrzuceni w rozległą a pustą przestrzeń możliwości, parweniusze byli łatwym łupem: nie stało okopów, w jakich mogliby się ukryć, nie było stalowych definicji, jakie mogliby przywdziać jak zbroję. I ze wszystkich stron chronionych przez stare reduty, i ze wszystkich miejsc, w jakich pospiesznie wznoszono nowe szańce, sypały się rzęsiście zatrute strzały.”
3) Niedopowiedzenia, które polegają na tym, że w jakimś wyrażeniu opuszcza się jego pewien istotny składnik; odmianą niedopowiedzenia jest elipsa. Tym jednak różni się ona od zwykłych, tu omawianych niedopowiedzeń, że elipsa jest amfibolią, a więc pominięciem pewnego wyrazu w wyrażeniu złożonym. Pominięcie to prowadzi do wieloznaczności wyrażenia. Niedopowiedzenia natomiast, o których tu mówimy, utrudniają lub uniemożliwiają ocenę wartości logicznej zdania. Można odróżnić niedopowiedzenia kwantyfikacji, gdy w pewnej wypowiedzi nie wskazuje się, ile desygnatów nazwy będącej podmiotem zdania posiada cechę wskazaną w orzeczniku (np. „Studenci są leniwi”, „Włosi są impulsywni”) oraz niedopowiedzenia relatywizacji, kiedy zwroty relatywne traktuje się jak absolutne (np. „Joanna jest córką” (czyją?), „Zebranie odbędzie się o godz. 15.00” (kiedy?)).
4) Mieszanie znaczenia dosłownego z przenośnym, które polega na tym, że w jednej wypowiedzi (nad-)używa się zwrotów o znaczeniu przenośnym, nie-dosłownym, obrazowym obok zwrotów wziętych w znaczeniu dosłownym. Samo używanie zwrotów obrazowych upiększa lub podkreśla sens wypowiedzi i nie musi być błędem. Wadliwe jest ono dopiero wtedy, gdy może powodować wieloznaczność czy niejasność wypowiedzi (Przykład z mowy nad grobem byłego taternika zmarłego w wieku osiemdziesięciu lat: „Twoja dzielność nie znała granic. Zdobywając najwyższe szczyty

unosiłeś się nad przepaściami swej słabości i lęku. Przez ostatnie dwadzieścia lat walczyłeś z lawiną chorób wznosząc się na szczyty męstwa...")

5) Błąd figuralnego myślenia polegający na tym, że ktoś zwrot obrazowy bierze w znaczeniu dosłownym („Komunizm to elektryfikacja plus władza rad").
6) Przesunięcie (pomyłka) kategorialna polegająca na błędnym zakwalifikowaniu jakiegoś przedmiotu czy zjawiska do niewłaściwej kategorii przedmiotów (np. „lęk jest zjawiskiem psychologicznym" — powinno być: „psychicznym"; „skrócona metoda sprawdzania" — powinno być: „metoda skróconego sprawdzania"; metoda nie może być skrócona!).

Ćwiczenia

1. Jaki rodzaj błędu popełniono w następujących wypowiedziach:
   a) Ks. Andrzej w ostatnich dwóch latach życia miał kontakt z Orianą Fallaci. (ze wstępu do telewizyjnej rozmowy z ks. Andrzejem przeprowadzonej po śmierci Oriany Fallaci).
   b) Sprzedam stare biurko dla kobiety z grubymi rzeźbionymi nogami.
   c) Pracownicy administracyjni są leniwi.
   d) Spotkanie kobiet oczekujących potomstwa z Panem Ministrem odbędzie się w sali nr 12.
   e) Wybór sukienki dla nastolatki bywa wielkim problemem.
   f) Spółka WP w Mysimborze wyraża ubolewanie i oświadcza, że zobowiązała się do zaprzestania naruszania powyższych znaków towarowych oraz umieszczania ich na produkowanych przez WP towarach i materiałach reklamowych.
   g) Wznoszenie budynku nad brzegiem rzeki wymaga uzyskania specjalnego zezwolenia.
   h) Zawisza Bydgoszcz to klub, który już nie istnieje, występujący obecnie w IV lidze.
   i) Zaraz wracam.
   j) Zarówno policjanci, jak i duszpasterze powinni zająć się nielegalnym handlem alkoholem.

1.3.2. Błędy rozumowań

Rozumowanie najogólniej mówiąc polega na takim przechodzeniu od jednych zdań do innych zdań, że wiedza w punkcie dojścia jest doskonalsza od tej w punkcie wyjścia. Przy czym za wiedzę można uznać uzasadnione zdania prawdziwe. Wiedza zatem, uzyskana drogą rozumowania, winna składać się również ze zdań prawdziwych i uzasadnionych. Poprawność rozumowania wymaga więc spełnienia następujących warunków:

1. przesłanki winny być prawdziwe i należycie uzasadnione
2. między przesłankami a wnioskiem winna zachodzić zależność logiczna właściwa dla danego typu rozumowania i powodująca, że konkluzja (wniosek) jest uzasadniona w sposób właściwy dla danego rodzaju rozumowania.

Jeżeli któryś z tych warunków nie jest spełniony mamy do czynienia z błędem rozumowania. Błędy możemy zatem podzielić na dwie grupy:

1) błędy w przyjmowanych przesłankach:
   a) błąd materialny
   b) petitio principii
2) błędy w konsekwencjach (wyprowadzaniu) wniosku:
   a) błąd formalny
   b) ignoratio elenchi

Definicja 13. *Błąd materialny jest to błąd wnioskowania polegający na tym, że przynajmniej jedna z przesłanek wnioskowania jest zdaniem fałszywym.*

Oczywiście błądzi ten, kto nie jest świadomy fałszywości przesłanki (przypomnijmy: pojęcie błędu ma charakter pragmatyczny). Błąd materialny popełniany był na przykład w średniowieczu, kiedy uczeni przeprowadzali rozumowania w oparciu o przesłanki: „Natura nie znosi próżni" lub „Ziemia jest nieruchomym centrum Wszechświata". Popełnienie błędu materialnego nie musi prowadzić automatycznie do fałszywych wniosków; na przykład w astronomii przedkopernikańskiej, mimo przyjęcia jako podstawy astronomii założenia o Ziemi jako nieruchomym centrum wszechświata, dzięki wykorzystaniu skomplikowanego systemu założeń dodatkowych, trafnie opisywano ruch ciał niebieskich po nieboskłonie.

Definicja 14. *Błąd* petitio principii *zachodzi wówczas, gdy jako przesłankę w rozumowaniu przyjmuje się zdanie nieuzasadnione.*

Petitio principii (łac. *petitio* — prośba, *principium* — zasada; *petitio principii* — uroszczenie co do zasady, przesłanka jest zasadą, czyli założeniem dla konkluzji) polega najczęściej na tym, że jako przesłankę dla jakiegoś zdania przyjmuje się to samo zdanie tylko inaczej wyrażone lub zdanie, w którego dowodzie trzeba się powołać na zdanie właśnie dowodzone. Mamy wówczas do czynienia z błędnym kołem w dowodzeniu (*vitiosus circulus*). Na przykład *petitio principii* popełnia medyk w „Chorym z urojenia" Moliera wyjaśniający, że opium usypia ponieważ posiada moc usypiającą. Inny przykład: wiersze Słowackiego są wybitne, ponieważ Słowacki wielkim poetą był.

Katalog różnych postaci błędu *petitio principii* jest rozbudowany. Podamy tu kilka charakterystycznych przykładów.

a) *Błąd fałszywej przyczyny*, który polega na tym, że następstwo czasowe zdarzeń utożsamia się ze związkiem przyczynowym, na przykład: „Więcej ludzi umiera w szpitalu niż gdzie indziej. A więc pójście do szpitala jest przyczyną śmierci".
b) *Błąd pochopnej generalizacji* polega na wyprowadzeniu ogólnego wniosku na podstawie kilku przykładów: „Ponieważ kilka wsi, w których mieszka moja rodzina rozwija się, więc polska wieś jest w stanie rozwoju".
c) *Fałszywy dylemat* polega na oparciu się w rozumowaniu na pozornej dychotomii, np. „Kochaj Polskę albo wyjedź za granicę".
d) *Błędna analogia* polega na uznaniu za podobne rzeczy czy sytuacji, które faktycznie nie są podobne do siebie, na przykład: „w obliczu ujawnionych

afer politycznych wskazujących na poważny kryzys państwa, premier nie może podać się do dymisji, bo premier jest jak kapitan statku, a kapitan jako ostatni opuszcza tonący statek".

e) *Błąd złożonego pytania*, czyli pytania sugerującego odpowiedź, gdy sformułowanie pytania w sposób nieuczciwy ogranicza możliwe odpowiedzi na to pytanie, np. „Czy dalej zachowujesz się tak egoistycznie jak jesteś do tego przyzwyczajony?"; czasem może on przybrać postać *błędu wielu pytań w jednym*, na przykład: „Czy Kowalski miał w ręku jakiś przedmiot, być może była to broń, i czy strzelał z niej do kogoś?"

Drugą klasę błędów w rozumowaniu stanowią błędy w konsekwencjach polegające na tym, że pomiędzy przesłankami a wnioskiem albo nie występuje związek natury logicznej, albo związek ten nie jest wystarczający, by umożliwić dostateczne uzasadnienie wniosku.

Definicja 15. *Błąd formalny polega na tym, że we wnioskowaniu traktowanym subiektywnie jako dedukcyjne, wniosek nie wynika logicznie z przesłanek.*

Błąd formalny zwany jest błędem *non sequitur* (łac. nie wynika). Popełnia go osoba przeprowadzająca wnioskowanie według reguły, co do której błędnie sądzi, że reguła ta jest oparta na prawie logiki, podczas gdy faktycznie ta reguła na prawie logiki się nie opiera. Na przykład osoba, która przeprowadza następujące wnioskowanie:

$$\begin{array}{r} \textit{Jeżeli figura geometryczna jest kwadratem, to jest ona prostokątem równobocznym.} \\ \textit{Figura nie jest kwadratem.} \\ \hline \textit{Figura nie jest prostokątem równobocznym.} \end{array}$$

na pozór rozumuje poprawnie, gdyż przesłanki i wniosek są prawdziwe, wydaje się również, że między przesłankami a wnioskiem zachodzi logiczny związek. Faktycznie jednak osoba ta popełniła błąd formalny. W jej wnioskowaniu bowiem wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Aby to wykazać, wystarczy w schemacie tego wnioskowania:

$$\begin{array}{r} \text{Jeżeli } p\text{, to } q \\ \text{Nie jest tak, że } p \\ \hline \text{Nie jest tak, że } q \end{array}$$

za p podstawić zdanie: *Pewne zwierzę jest człowiekiem*, a za q zdanie: *Zwierzę to posiada dwie nogi*, aby otrzymać wnioskowanie o fałszywym wniosku:

$$\begin{array}{r} \textit{Jeżeli pewne zwierzę jest człowiekiem, to zwierzę to posiada dwie nogi.} \\ \textit{Pewne zwierzę nie jest człowiekiem (bo jest np. kurą).} \\ \hline \textit{Nie jest tak, że zwierzę to posiada dwie nogi.} \end{array}$$

Definicja 16. Ignoratio elenchi *(łac. nieznajomość tego, co ma być dowodzone) jest to błąd rozumowania polegający na tym, że dowodzi się czego innego niż to, co miało być dowodzone przy zachowaniu pozorów, że dowód dotyczy kwestii, która miała być dowodzona.*

W przypadku *ignoratio elenchi* nie występuje związek natury logicznej pomiędzy przesłankami a wnioskiem. Zostaje on zastąpiony związkiem o innym charakterze, a więc na przykład związkiem skojarzeniowym, psychologicznym, zwyczajowym, itp. Od czasów starożytnych znany jest pokaźny zbiór rozmaitych tego rodzaju wadliwości rozumowania. Należy traktować je jako błędy, gdy podmiot, w którego rozumowaniu się pojawią nie jest świadom wadliwości swego rozumowania. Tego rodzaju braki logicznego związku między przesłankami a wnioskiem będą natomiast sposobami nierzetelnej argumentacji, kiedy ktoś zastosuje je w sposób zamierzony. Wówczas nazywane są one chwytami erystycznymi, czyli nierzetelnymi zabiegami, które w sporze mają prowadzić do pokonania przeciwnika. Oto niektóre z nich:

a) *Argumentum ad hominem* (łac. argument skierowany do człowieka), który polega na tym, że w sporze zamiast zwalczania tezy głoszonej przez przeciwnika zwalcza się jego osobę, podając fakty mające go zdyskredytować i podważyć jego wiarygodność. Przykłady:

   „Szanowny dyskutant głosi tezę o nieistnieniu Boga. Jaki wpływ na to ma fakt, że szanowny Pan przez dwadzieścia lat był członkiem partii komunistycznej, a Pańscy dziadkowie byli funkcjonariuszami Ministerstwa Bezpieczeństwa Publicznego?”; „Warto zapytać czemu czcigodny Pan nigdy nie wspomniał, że Pański dziadek służył w Wehrmachcie!” (przywołanie faktów dyskredytujących przeciwnika)
   „Jest zdumiewające jak szybko Pana poglądy dopasowują się do sytuacji politycznej!” — podważenie wiarygodności przez wskazanie na chwiejność poglądów, czy zasugerowanie oportunizmu;
   „Zarzucacie nam nieuczciwe prowadzenie kampanii wyborczej, a czy wy czynicie inaczej?” — argument zwany *tu quoque*, (łac. ty także), „odbijanie pałeczki”, czyli przypisywanie przeciwnikowi cech nam zarzucanych;
   „Cóż może wiedzieć o życiu tak młody człowiek!”; „Widać, że Pan Profesor jest już bardzo stary, skoro głosi takie poglądy” — powoływanie się na wiek przeciwnika albo przeciwnie, na jego brak doświadczenia;
   „Pan doktor głosi szkodliwość palenia. Czemu wypala Pan dwie paczki papierosów dziennie?” — zarzucanie braku zgodności między tym co się mówi a tym co się robi, itp.

b) *Argumentum ad personam* (łac. do osoby) to zwalczanie osoby przeciwnika poprzez bezpośredni atak na jego osobę, lżenie go, etc. Niektórzy traktują *ad personam* jako odmianę argumentu *ad hominem*. Argumenty te różni jednak to, iż zarzuty stawiane w *ad hominem* powinny być oparte na faktach, podczas gdy *ad personam* polega po prostu na znieważaniu przeciwnika. Przykłady:
   „Twoje argumenty Sokratesie są równie odrażające, jak twój wygląd!”; „Jest Pan zerem, Panie Pośle!”

c) *Argumentum ad verecundiam* (łac. argument do nieśmiałości) polega na nierzetelnym posługiwaniu się argumentacją z autorytetu, odwoływaniu się do nazwisk, cytowaniu w obcych językach (po ustaleniu że uczestnicy dyskusji języków tych nie znają) lub wybiórczym cytowaniu, czy powoływaniu się na znajomość ważnych osobistości w celu onieśmielenia lub ośmieszenia przeciwnika. Przykłady:

"Bóg istnieje, ponieważ Albert Einstein wierzył w jego istnienie"; „Nawet w Biblii można znaleźć zdanie «Boga nie ma» (nie dodając, że w Biblii po tych słowach następuje «pomyślał głupiec w sercu swoim»); „Jak powiedział Józef Piłsudski ..."

d) *Argumentum ad populum* (łac. argument do ludu) polega stosowaniu na zabiegów nakierowanych na pozyskanie dla głoszącego sympatii słuchaczy lub wzbudzenie w nich niechęci do przeciwnika. Przykłady:

   „Tylko rolnicy stoją jeszcze na straży polskiej ziemi" — odwołanie się do dumy z wykonywanego zawodu, miejsca zamieszkania;
   „Należy ubierać się tak a tak, bo wszyscy się tak ubierają" — odwołanie się do powszechności upodobań, mody;
   „Prawdziwy mężczyzna używa tylko maszynki do golenia z potrójnym ostrzem" — odwoływanie się do snobizmu, itp.

e) *Argumentum ad ignorantiam* (łac. apelowanie do niewiedzy) polega na tym, że z faktu, że przeciwnik nie potrafi uzasadnić tego, co twierdzi wnioskuje się o fałszywości jego twierdzenia. Przykład:
   „Ponieważ Polska nie potrafi wykazać, że samoloty CIA nie lądowały w Polsce, w Polsce znajdowały się tajne więzienia CIA".

f) *Argumentum ad baculum* (łac. apelowanie do kija) polega na użyciu gróźb w celu wymuszenia pewnego zachowania się. Na przykład: „Ciekawe, czy w obecności prasy powtórzyłby Pan Dyrektor to, co powiedział?" „Wystarczy że powtórzę treść naszej rozmowy Pańskiemu szefowi!".

Ćwiczenia

1. Jaki błąd popełniono w następujących rozumowaniach
   a) *Jeżeli dziś jest wtorek, to jutro jest środa. Jutro jest środa.* A więc *Dziś jest wtorek.*
   b) *Przeziębienie jest chorobą wywoływaną przez bakterie. Jeżeli choroba jest wywoływana przez bakterię, to leczy się ją przez podawanie choremu antybiotyku.* A zatem *Przeziębienie leczy się przez podawanie choremu antybiotyku.*
   c) *Bóg nie istnieje*, ponieważ *John Lennon twierdził, że Bóg nie istnieje.*
   d) *Pięcioro studentów prawa napisało w ankiecie, że wykład z logiki jest źle prowadzony.* A więc *Każdy student prawa uważa, że wykład z logiki jest źle prowadzony.*
2. Kiedy chwyty erystyczne są błędami rozumowania, a kiedy nierzetelnymi sposobami argumentowania?
3. Jakiego chwytu erystycznego użyto w następujących wypowiedziach?
   a) *Jeżeli będą głosować Państwo na Wiśniewskiego, a nie na mnie, będę musiał sięgnąć do zawartości mojego archiwum...*
   b) *Jak Państwo dobrze wiedzą, już Arystoteles powiedział „in principio erat Verbum et Verbum erat apud Deum et Deus erat Verbum hoc erat in principio apud Deum omnia per ipsum facta sunt et sine ipso factum est nihil quod factum est"...*
   c) *Widzimy rozwój Pana myśli! W 1953 roku twierdził Pan, że komunizm jest jedynym sprawiedliwym ustrojem. W 1980 był Pan piewcą*

„Solidarności”, a w 1990 roku rozwinął Pan liberalne poglądy na gospodarkę...

1.4. Teoria zdań kategorycznych

Do tej pory stwierdzaliśmy niezawodność wnioskowania wykazując, że jest ono oparte na jakimś prawie klasycznego rachunku zdań. Jednak istnieją takie wnioskowania, intuicyjnie uznawane za niezawodne, których niezawodności nie można wykazać odwołując się jedynie do tego rachunku. Weźmy następujący przykład:

Każdy prawnik jest człowiekiem.
Każdy prokurator jest prawnikiem.
____
Każdy prokurator jest człowiekiem.

Zapisując to wnioskowanie w języku rachunku zdań musielibyśmy pierwsze zdanie zastąpić zmienną p, drugie — zmienną q, trzecie zaś zmienną r (we wnioskowaniu bowiem występują trzy zdania proste). Otrzymalibyśmy schemat wnioskowania:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

który nie jest schematem niezawodnym, ponieważ odpowiadająca mu implikacja $(p \wedge q) \rightarrow r$ nie jest prawem logiki (jest ona zdaniem fałszywym dla $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$). Nie możemy stwierdzić niezawodności tego wnioskowania, ponieważ zapisując jego schemat użyliśmy po prostu trzech różnych zmiennych zdaniowych, a oczywiście nie dzieje się tak, że z dwóch dowolnych zdań wynika logicznie zdanie trzecie. Z łatwością można zauważyć, że o niezawodności naszego wnioskowania decyduje coś innego, niż fakt, że jest ono zbudowane ze zdań prostych. Jego niezawodność opiera się bowiem na strukturze tych zdań prostych. Wszystkie one są zdaniami postaci „Każde ... jest ...”, czyli zdaniami kategorycznymi, których teorię podał już Arystoteles. W niniejszym paragrafie przedstawimy właśnie teorię takich wnioskowań, którą nazywa się teorią zdań kategorycznych.

Definicja 17. *Zdania kategoryczne są to zdania postaci: „Każde S jest P”, „Żadne S nie jest P”, „Niektóre S są P” i „Niektóre S nie są P”.*

Są to więc zdania złożone z funktora zdaniotwórczego od dwóch argumentów nazwowych oraz dwóch jego nazwowych argumentów reprezentowanych przez zmienne S, P. Ze względu na argumenty nazwowe funktory te nie są funktorami prawdziwościowymi. W teorii zdań kategorycznych zakłada się, iż za zmienne nazwowe S i P można podstawiać wyłącznie nazwy ogólne, ale nie-uniwersalne (nazwy uniwersalne to takie, jak na przykład: „przedmiot”, „coś” itp.). W szczególności, co trzeba mocno podkreślić, nie mogą więc być podstawiane nazwy puste (takie jak np. „krasnolud” czy „hobbit”). Jako przykłady zdań kategorycznych mogą posłużyć nam następujące zdania: *Każdy kot jest drapieżnikiem*, *Niektórzy studiujący są mężczyznami* i tym podobne. Podmioty i orzeczniki zdań kategorycznych nazywane są terminami (od łac. *terminus* — kres, granica). Zdania kategoryczne można podzielić według dwóch kryteriów; pierwsze to *jakość* zdania, czyli fakt czy zdanie jest twierdzące, czy przeczące, drugie zaś, to *ilość*, czyli własność zdania polegająca na tym, że zdanie orzeka bądź o wszystkich desygnatach podmiotu, bądź też tylko o niektórych jego desygnatach. W ten sposób zdania kategoryczne mogą być dzielone na twierdzące i przeczące oraz na ogólne i szczegółowe. Objaśnienia w tym miejscu wymaga przyjmowane w teorii zdań kategorycznych znaczenie słówka „niektóry”. Słówko to w języku polskim potocznie używane w znaczeniu „niewiele”, „nie wszyscy” może być używane w języku naukowym w co najmniej trzech znaczeniach, a mianowicie:

— „co najmniej niektóry”, czyli „nie żaden”, a zatem: „przynajmniej jeden” — znaczenie to dopuszcza taką możliwość, że i wszystkie przedmioty posiadają daną cechę; prawdziwe przy tym znaczeniu są zdania: *Niektórzy studiujący są kobietami*; *Niektórzy mężczyźni są ludźmi* (bo co najmniej jeden mężczyzna jest człowiekiem), i tym podobne.

— „co najwyżej niektóry”, czyli „nie wszystkie” — używamy go, gdy chcemy stwierdzić, że co najmniej jeden przedmiot nie posiada jakiejś cechy, choć być może i wszystkie przedmioty tej cechy nie posiadają; np. *Niektórzy studiujący nie są kobietami*, *Niektóre koty nie są roślinożerne*, i tym podobne.

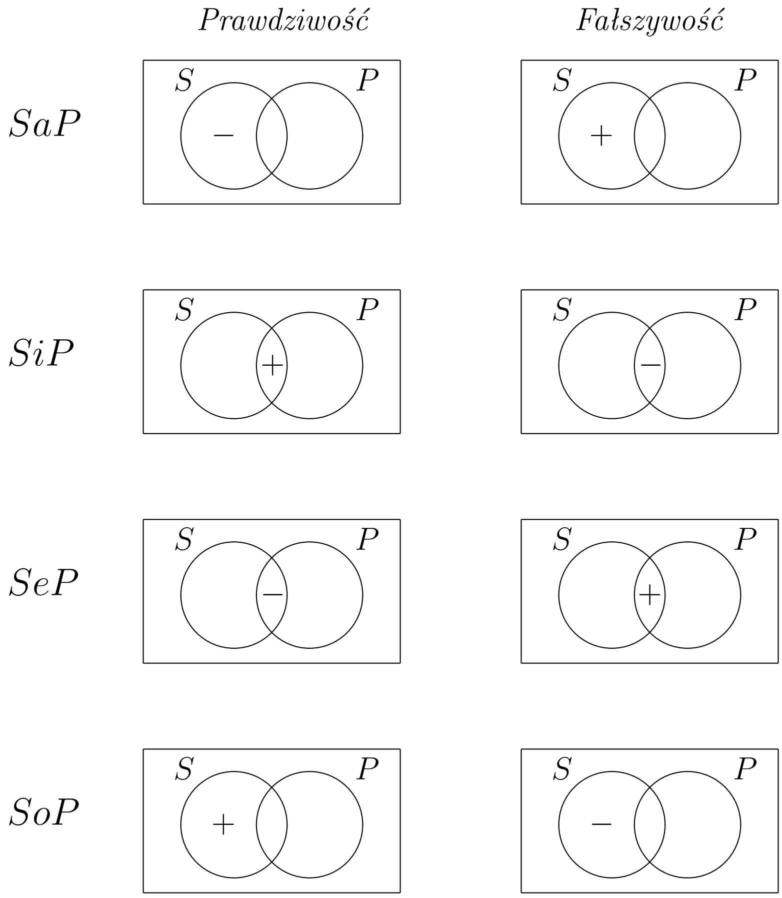
— „tylko niektóry”, czyli znaczenie najbliższe potocznemu, w którym „niektóry” znaczy tyle, co „kilka”, „pewna ilość”, ale na pewno „nie wszystkie” i „nie żaden”; np. *Niektórzy studiujący otrzymują stypendium naukowe*; *Niektórzy ludzie są księżmi*, itp.

Podstaw rozumienia zdań kategorycznych może dostarczyć poniższa tabela oraz zamieszczone pod nią tzw. diagramy Venna.

Nazwa zdania kategorycznego	oznaczenie	sposób czytania	interpretacja egzystencjalna
ogólno-twierdzące	SaP	Każde S jest P	Nie istnieją S nie będące P
szczegółowo-twierdzące	SiP	Niektóre S są P	Istnieją S będące P
ogólno-przeczące	SeP	Żadne S nie jest P	Nie istnieją S będące P
szczegółowo-przeczące	SoP	Niektóre S nie są P	Istnieją S nie będące P

Pierwsza z kolumn zawiera nazwę zdania kategorycznego, druga zaś symboliczne jego oznaczenie. Litery a, e, i, o reprezentują funktory zdaniotwórcze od dwóch argumentów nazwowych, którymi są odpowiednio zwroty „Każde ... jest ...”, „Żadne ... nie jest ...”, „Niektóre ... są ...”, „Niektóre ... nie są ...”. Przyjęcie pierwszych czterech samogłosek alfabetu łacińskiego jako symboli funktorów bierze się stąd, że po łacinie *affirmo* znaczy tyle, co „twierdzę”, *nego* zaś znaczy „przeczę”. Litery a oraz i są zatem funktorami zdań twierdzących, a litery e i o — funktorami zdań przeczących, przy tym pierwsze samogłoski z obu par (a, e) odnoszą się do zdań ogólnych, a drugie (i, o) do zdań szczegółowych.

Diagramy Venna ilustrują pustość lub niepustość zbiorów. Mówimy, że zbiór jest pusty, gdy nie posiada elementów. Pustość jakiegoś zbioru na diagramie będzie ilustrowana przez postawienie na odpowiadającej temu zbiorowi części diagramu znaczka „–” (innym sposobem zaznaczenia pustości jest wykreślanie odpowiedniego obszaru na diagramie), podczas gdy niepustość zbioru będzie zaznaczana postawieniem znaczka „+”. W ten sposób otrzymujemy następujące diagramy dla prawdziwości i fałszywości zdań kategorycznych:



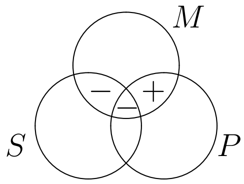
Diagramy Venna są właściwie narzędziem wystarczającym do badania poprawności rozumowań. Możemy ich zastosowanie na następującym przykładzie:
Zadanie: Zbadaj poprawność następującego schematu wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c} MaP \\ SaM \end{array}}{SaP}$$

Wnioskowanie to odpowiada wyrażeniu zdaniowemu (zgodnie z zasadą, że każdemu schematowi wnioskowania odpowiada implikacja, której poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek schematu, a następnikiem jego wniosek).

$$(PiM \wedge SeM) \rightarrow SoP$$

Badanie tego, czy schemat wnioskowania (zwany w teorii zdań kategorycznych trybem sylogistycznym) jest dedukcyjnym schematem wnioskowania lub czy odpowiadająca mu implikacja jest prawem logiki, rozpoczynamy od założenia prawdziwości poprzednika badanej implikacji. Poprzednik ten jest koniunkcją, zatem oba człony tej koniunkcji winny być prawdziwe. Reprezentujemy prawdziwość owych przesłanek na diagramie Venna. Prawdziwości wniosku nie nanosimy na diagram. Diagram dla prawdziwości wniosku powinien w sposób jednoznaczny wynikać z diagramu dla prawdziwości przesłanek!



Reprezentowanie na diagramie prawdziwości przesłanek dogodnie jest zacząć od przesłanki ogólnej, potem reprezentujemy wartość logiczną (prawdziwość) przesłanki szczegółowej. Czasem dla uproszczenia można pominąć rysowanie na diagramie uniwersum (tak też, dla uproszczenia, uczynimy w analizowanych tu zadaniach). Jak widać z powyższego diagramu, aby zdanie SoP było prawdziwe, na diagramie powinien występować „+” na części S, które nie są P . Ale na tym obszarze „+” nie występuje (choć oczywiście na obszarze reprezentującym S „+” mógłby się pojawić, bo S, podobnie jak wszystkie terminy zdań kategorycznych, jest nazwą niepustą; kłopot w tym, że uznając prawdziwość przesłanek nie wiemy, czy „+” może być na S będących P czy też na S nie będących P), a zatem tryb sylogistyczny nie jest niezawodny.

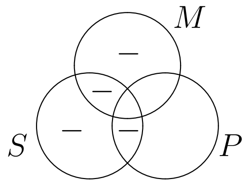
1.4.1. Stare sylogizmy

1. Znajdź wniosek (w oparciu o diagramy Venna) na podstawie następujących przesłanek:

Ludzie młodzi lubią spacerować.
Studenci są młodzi.
Rozwiązanie:
1. Zastępujemy nazwy w przesłankach za pomocą odpowiednich zmiennych oraz uzupełniamy zwroty kwantyfikujące. W języku polskim obowiązują pewne „niepisane” zasady: zdanie z nazwą w liczbie mnogiej traktujemy jako ogólne (a więc dodajemy zwrot „każdy” na początku), dla zdań szczegółowych kwantyfikacja jest wskazywana przez zwroty „pewne”, „niektóre”, czasem przez zastąpienie czasownika „jest (są)” przez „bywają”, itp. Otrzymujemy: „młody człowiek” = M, „student”= S, „ten, który lubi spacerować” = P

$$\begin{array}{c} MaP \\ \underline{SaM} \\ ? \end{array}$$

2. Rysujemy diagram Venna:



3. Analizujemy diagram pod kątem relacji między S a P. Widzimy, że na diagramie wszystkie S nie będące P są „wykreślone" (na odpowiednich obszarach diagramu są „–", czyli nie istnieją S nie będące P, a stąd wynika, że zadanie SaP jest prawdziwe. A zatem szukanym wnioskiem jest zdanie: „Każdy student lubi spacerować".

a) Polacy są pracowici.
Żaden miś koala nie jest pracowity.
b) Pewni Żydzi są bogaci.
Wszyscy Eskimosi nie są Żydami.
c) Żadne tłuste stworzenie nie biega dobrze.
Pewne charty biegają dobrze.
d) Śliwki w czekoladzie są słodkie.
Niektóre słodkie rzeczy są lubiane przez dzieci.
e) Wszyscy bladzi ludzie są flegmatyczni.
Nikt nie wygląda poetycznie, o ile nie jest blady.
f) Pewne świnie są dzikie.
Wszystkie świnie są tłuste.
g) Żadne dzieci nie są cierpliwe.
Żadne niecierpliwe stworzenie nie może usiedzieć spokojnie.
h) Żadne misie koala nie są białe.
Żaden słoń nie jest biały.
i) Wszelkie dobrze odżywione kanarki śpiewają głośno.
Żaden kanarek nie jest smutny jeśli śpiewa głośno.
j) Niektóre jajka są ugotowane na twardo.
Żadne jajka nie są nierozbijalne.

2. Zbadaj za pomocą diagramów Venna, czy poniższe wnioskowania (sylogizmy) są poprawne.

a)
Żadni doktorzy nie są entuzjastami.
Pewni prawnicy są entuzjastami.
Pewni prawnicy nie są doktorami.

b)
Słowniki są użyteczne.
Użyteczne książki są drogie.
Słowniki są drogie.
c)
Wszelkie lwy są gwałtowne.

Pewne lwy nie piją kawy.
Pewne stworzenia, które piją kawę nie są gwałtowne.

d)
Wszelkie osy są nieprzyjazne.
Żadne lalki nie są nieprzyjazne.
Lalki nie są osami.

e)
Wszystkie moje cukierki są czekoladowe.
Wszystkie moje cukierki są smaczne.
Moje czekoladowe cukierki są smaczne.

f)
Wszystkie młode baranki skaczą.
Żadne młode stworzenie nie jest zdrowe, o ile nie skacze.
Wszelkie młode baranki są zdrowe.

g)
Żaden ptak oprócz pawia nie jest dumny ze swego ogona.
Niektóre ptaki, które są dumne ze swego ogona, nie mogą śpiewać.
Pewne pawie nie mogą śpiewać.

h)
Żadna żaba nie jest poetką.
Pewne kaczki nie są poetkami.
Pewne kaczki nie są żabami.

1.4.2. Łańcuszniki

Znajdź wniosek dla następujących soritesów (sorites (stos, łańcusznik) to rozumowanie oparte na zdaniach kategorycznych mające więcej niż dwie przesłanki):
(1) Dzieci są nielogiczne.
(2) Nigdy nie pogardza się kimś, kto poskromił krokodyla.
(3) Nielogicznymi osobami się nie pogardza.
Rozwiązanie:
1. Tak jak poprzednio, wprowadzamy oznaczenia: „dziecko” = D, „nielogiczny” = N, „ktoś, kim pogardzają” = P, „poskromiciel krokodyla” = K; określamy też uniwersum, w którym analizujemy związki między zbiorami przedmiotów — tu może to być zbiór ludzi. 2. Zapisujemy schemat przesłanek:

$$\begin{array}{c} DaN \\ KeP \\ \underline{NaP} \\ ? \end{array}$$

2. Żeby znaleźć wniosek, w zadaniu 1. rysowaliśmy diagram Venna. Tu jednak byłoby to kłopotliwe, bo na diagramie trzeba by umieścić 16 różnych obszarów (są cztery nazwy, a więc wszystkich możliwych zbiorów przedmiotów wyróżnionych przez te nazwy jest 16 - jak wszystkich zbiorów dla trzech nazw było 8); chcąc narysować diagram trzeba by ostatnie koło rysować w innej

płaszczyźnie. Żeby uniknąć kłopotu w soritesach najdogodniej jest zastosować metodę znajdowania wniosków cząstkowych — zgodnie z niezawodnym schematem rachunku zdań:

$$\frac{\begin{array}{c}(p \wedge q \wedge r) \to s\\ (p \wedge q) \to t\end{array}}{(r \wedge t) \to s}$$

tak więc widzimy, że z drugiej i trzeciej przesłanki można utworzyć wnioskowanie cząstkowe:

$$\frac{\begin{array}{c}KeP\\ NaP\end{array}}{?}$$

dla którego za pomocą diagramów Venna znajdujemy wniosek NeK. Wniosek ten razem z pozostałą przesłanką pozwala utworzyć następny schemat wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{c}DaN\\ NeK\end{array}}{?}$$

Znowu za pomocą diagramów Venna można z tych przesłanek znaleźć wniosek KeD, czyli „Żaden poskromiciel krokodyla nie jest dzieckiem" (albo równoważne zdanie „Żadne dziecko nie jest poskromicielem krokodyla".

Czasem w soritesach wydaje się, że jest za dużo terminów. Wtedy korzystając z następujących praw obwersji ($-P$ — czytamy „nie-P, np. „nie-kot", czyli wszystko w uniwersum co nie jest kotem; łatwo sprawdzić te prawa za pomocą diagramów Venna):

$$\begin{array}{c} SaP \equiv Se-P\\ SeP \equiv Sa-P\\ SiP \equiv So-P\\ SoP \equiv Si-P \end{array}$$

możemy zmniejszyć liczbę terminów; np. w poniższym zadaniu b) żeby znaleźć wniosek, musimy określić dość wąskie uniwersum: „moje dzieci". Wtedy np. „syn" = „nie-córka", a „szczupły"=„nie-tłusty".
a)
(1) Wszystkie niedojrzałe owoce są niezdrowe.
(2) Wszystkie te jabłka są zdrowe.
(3) Żaden owoc, który rośnie w cieniu nie jest dojrzały.

b)
(1) Wszyscy moi synowie są szczupli.
(2) Żadne z moich dzieci nie jest zdrowe, o ile nie gimnastykuje się.

(3) Wszystkie żarłoki, które są moimi dziećmi są tłuste.
(4) Żadna moja córka nie gimnastykuje się.
c)
(1) Nikt, kto naprawdę ceni Beethovena, nie chrząknie gdy grają sonatę 'Księżycową'.
(2) Świnie na Nowej Gwinei są beznadziejnymi ignorantami w muzyce.
(3) Nikt, kto jest zupełnym ignorantem w muzyce, nie przestanie chrząkać, gdy grają sonatę 'Księżycową'.
d)
(1) Zwierzęta, które nie wierzgają, są zawsze niepobudliwe.
(2) Osły nie mają rogów.
(3) Byk może zawsze wziąć kogoś na rogi.
(4) Żadne zwierzę, które nie wierzga, nie jest łatwe do okiełznania.
(5) Żadne bezrogie zwierzę nie jest łatwe do okiełznania.
(6) Wszystkie zwierzęta są pobudliwe, oprócz byków.
e)
(1) Jedynymi zwierzętami w tym domu są koty.
(2) Każde zwierzę, które lubi gapić się na księżyc, nadaje się na zwierzę domowe.
(3) Kiedy nie znoszę jakiegoś zwierzęcia, unikam go.
(4) Żadne zwierzę nie jest drapieżnikiem, o ile nie łazi po nocy.
(5) Każdy kot poluje na myszy.
(6) Żadne zwierzę mi nie odpowiada poza tymi w tym domu.
(7) Kangury nie nadają się na zwierzęta domowe.
(8) Żadne zwierzę poza drapieżnikami nie poluje na myszy.
(9) Nie znoszę zwierząt, które mi nie odpowiadają.
(10) Zwierzęta, które łażą po nocy lubią gapić się na księżyc.

1.5. Wybrane pojęcia teorii zbiorów i relacji

W dotychczasowych rozważaniach pojawiały się terminy „zbiór" oraz „relacja". W tym miejscu chcemy krótko omówić kilka spośród najważniejszych pojęć teorii zbiorów oraz tej jej części, którą stanowi teoria relacji. Ponieważ pojęcia te są znane z programu matematyki w szkole średniej, poniższe uwagi będą bardzo krótkie. Należy jeszcze dodać, że w poniżej prezentowanej teorii zbiorów posługiwać się będziemy znakiem równości, zakładając, że spełnione są następujące trzy warunki dotyczące relacji równości (identyczności):

$$x = x$$

tzn., że każdy przedmiot jest identyczny z samym sobą.

$$x = y \rightarrow y = x$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, to i y jest identyczny z x.

$$(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$$

czyli jeśli x jest identyczny z y, a y jest identyczny z z, to x jest identyczny z z.

1.5.1. Pojęcie zbioru, działania na zbiorach i stosunki między zbiorami

Jak już wyżej wskazaliśmy, zbiory w sensie dystrybutywnym mogą być formowane przez proste wyliczenie jakichś przedmiotów lub przez podanie własności posiadanej przez wszystkie przedmioty danego zbioru. Ten drugi sposób można zapisać w postaci wzoru:

$$x \in \{y : W(y)\} \equiv W(x)$$

co można odczytać w sposób następujący: x należy do zbioru tych i tylko tych przedmiotów, które posiadają własność W wtedy i tylko wtedy, gdy x posiada własność W. Formułę tę czasem nazywa się aksjomatem definicyjnym. Obok tego warunku podstawowy dla rozumienia pojęcia zbioru jest warunek równości dwóch zbiorów, który może być zapisany w następujący sposób:

$$A = B \equiv (\forall x)[x \in A \equiv x \in B]$$

Warunek ten stwierdza, że dwa zbiory są równe (identyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy. Identyczne są więc np. takie dwa zbiory: $A = \{1, 21, 35\}$ oraz $B = \{21,\ 35,\ 1\}$; kolejność ustawienia elementów w zbiorze nie odgrywa tu roli.

Jeśli rozpatrujemy zbiory o skończonej liczbie elementów, dwa z nich mają szczególny charakter — zbiór uniwersalny i zbiór pusty. Zbiór uniwersalny to zbiór wszystkich przedmiotów. Na gruncie logiki formalnej podaje się następującą definicję zbioru uniwersalnego:

$$x \in V \equiv x = x$$

czyli x należy do zbioru uniwersalnego wtedy, gdy $x = x$. Zauważmy, że warunek po prawej stronie równoważności jest spełniony przez każdy przedmiot, a to oznacza, że każdy przedmiot należy do zbioru uniwersalnego. Oczywiście w praktyce ograniczamy dziedzinę rozważań do jakiegoś podzbioru zbioru uniwersalnego (wskazywaliśmy na to omawiając kwantyfikatory o ograniczonym zakresie). Taki podzbiór nazywamy uniwersum lub dziedziną przedmiotową dyskursu. W podobny sposób definiuje się zbiór pusty (zbiór nie posiadający żadnych elementów) — podaje się mianowicie warunek, którego nie spełnia żaden przedmiot. Otrzymujemy definicję:

$$x \in \emptyset \equiv \sim (x = x)$$

Fakt dopuszczania zbiorów pustych w teorii zbiorów (i w teorii mnogości, która jest teorią zbiorów nieskończonych) wskazuje na różnicę między dystrybutywnym a kolektywnym znaczeniem słowa „zbiór”. Zbiory w sensie kolektywnym nie mogą być puste (bo są to całości w sensie fizycznym, czyli istności czaso-przestrzenne), nie mamy natomiast problemu z wyobrażeniem sobie dystrybutywnie rozumianego, pustego zbioru Polaków noblistów w dziedzinie ekonomii (do niego należałyby osoby narodowości polskiej, które otrzymały nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Takich osób aktualnie nie ma, ale opisaną własność bez popadnięcia w sprzeczność można rozważać).

Podstawowymi działaniami na zbiorach są: dodawanie, odejmowanie i mnożenie zbiorów oraz dopełnianie zbioru do uniwersum, a rezultatami tych działań są (odpowiednio) suma zbiorów, różnica zbiorów, iloczyn zbiorów i dopełnienie zbioru.

Definicja 18. *Suma zbiorów A i B (oznaczana za pomocą symbolu $A \cup B$) jest to zbiór złożony z tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B, czyli*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cup B \equiv (x \in A \vee x \in B)$$

Definicja 19. *Iloczyn zbiorów A i B (oznaczany jako $A \cap B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B, czyli*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

a zatem

$$x \in A \cap B \equiv (x \in A \wedge x \in B)$$

Definicja 20. *Różnica zbiorów A i B (oznaczana jako $A - B$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów zbioru A, które nie są elementami zbioru B, czyli*

$$A - B = \{x : x \in A \wedge \sim (x \in B)\}$$

a zatem

$$x \in A - B \equiv x \in A \wedge \sim (x \in B)$$

Definicja 21. *Dopełnienie zbioru A (oznaczane jako $-A$) jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które nie są elementami zbioru A, czyli*

$$x \in -A \equiv \sim (x \in A)$$

Przykłady: sumą zbiorów prokuratorów i profesorów jest zbiór tych osób, które są prokuratorami lub są profesorami, iloczyn tych zbiorów jest zbiorem osób będących zarazem prokuratorami i profesorami, a różnicę stanowi zbiór prokuratorów nie będących profesorami. Z kolei podanie dopełnienia jakiegoś zbioru wymaga określenia uniwersum, w którym dany (dopełniany) zbiór się zawiera. Np. dopełnienie zbioru prokuratorów (w uniwersum ludzi) jest zbiorem wszystkich ludzi nie będących prokuratorami, ale dopełnienie tego samego zbioru prokuratorów w uniwersum wszystkich przedmiotów będzie obejmować jakiekolwiek przedmioty, które nie są prokuratorami (np. stoły, foki, ludzi nie będących prokuratorami, itp). Zbiór wszystkich wyrażeń danego języka jest sumą zbiorów wyrażeń nazwowych, zdaniowych, funktorów i operatorów tego języka, zbiór wyrażeń nazwowych tego języka to różnica zbioru wyrażeń samodzielnych i zbioru wyrażeń zdaniowych (tego języka), a zbiór nie-funktorów to dopełnienie zbioru funktorów w uniwersum wszystkich wyrażeń tego języka.

Kolejnym ważnym pojęciem teorii zbiorów jest pojęcie zawierania się zbiorów (inkluzji zbiorów).

Definicja 22. *Zbiór A zawiera się w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, tzn.*

$$A \subset B \equiv (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

lub też

$$A \subset B \equiv A - B = \emptyset$$

Tak np. zbiór prawników zawiera się w zbiorze ludzi, a zbiór nazw danego języka zawiera się w zbiorze wyrażeń nazwowych tego języka. Zauważmy, że zgodnie z podaną definicją każdy zbiór zawiera się w samym sobie, tzn. prawdą jest, że $A \subset A$ oraz zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze, tzn. $\emptyset \subset A$. Dysponując pojęciem zawierania się zbiorów można podać definicję równości zbiorów, a mianowicie:

$$A = B \equiv A \subset B \wedge B \subset A$$

tzn. dwa zbiory są identyczne, gdy wzajemnie się zawierają.

1.5.2. Pojęcie relacji i niektóre własności relacji

Każdy człowiek po kursie matematyki wie, co to jest funkcja. Jednak nie każdy kojarzy pojęcie funkcji z pojęciem o szerszym zakresie, czyli pojęciem relacji. Jest to drugie, obok „zbioru", ważne pojęciem logiki dotąd jeszcze przez nas nie omawiane. Intuicyjnie rzecz ujmując relacja jest to stosunek zachodzący między przedmiotami. Powiemy, że Jan pozostaje w relacji bycia ojcem względem Hipolita, podobnie Karol jest ojcem Zenobii, a Gerwazy ojcem Protazego. Ogólnie można powiedzieć, że relacja bycia ojcem jest to wspólna własność par osób (Jana i Hipolita, Karola i Zenobii, Gerwazego i Protazego, i tak dalej). Analizując relację bycia ojcem zauważamy ponadto, że kolejność między przedmiotami pozostającymi w danym stosunku jest rzeczą ważną; jeśli np. Jan jest ojcem Hipolita, to oczywiście nie jest prawdą, że Hipolit jest ojcem Jana. Ta cecha różni pary członów relacji od „zwykłych" zbiorów dwuelementowych, w przypadku których kolejność elementów nie odgrywa roli, tzn. prawdą jest, że $\{x, y\} = \{y, x\}$. Te dwa spostrzeżenia rzucają światło na logiczne określenie relacji (tu dla uproszczenia ograniczymy się jedynie do określenia relacji dwuczłonowych).

Aby spełnić wymóg, iż kolejność elementów w parze jest jej cechą istotną, wprowadza się pojęcie pary uporządkowanej (symbolizowane przez zapis $< x, y >$ odczytywany: „para uporządkowana o pierwszym elemencie x i drugim y"), która jest zbiorem dwuelementowym, spełniającym następujący warunek równości par uporządkowanych:

$$< x, y >=< z, u >\equiv [x = z \wedge y = u]$$

co czytamy: dwie pary uporządkowane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich pierwsze elementy są równe oraz ich drugie elementy są równe. Dysponując pojęciem pary uporządkowanej można zdefiniować relację dwuczłonową.

Definicja 23. *Relacja dwuczłonowa jest to zbiór par uporządkowanych; innymi słowy x pozostaje w relacji R względem y wtedy i tylko wtedy, gdy para uporządkowana $< x, y >$ jest elementem relacji R, tj. pewnego zbioru par uporządkowanych.*

Wyrażenie „para uporządkowana $< x, y >$ jest elementem relacji R”, czyli symbolicznie $< x, y > \in R$ zapisujemy skrótowo xRy.

Relacje zachodzą między przedmiotami. Ważne jest odróżnienie zbiorów przedmiotów, które są pierwszymi członami relacji od tych, które są drugimi jej członami. Pierwszy zbiór nazywamy dziedziną relacji, a drugi jej przeciwdziedziną.

Definicja 24. *Dziedzina relacji R jest to zbiór wszystkich przedmiotów, które względem jakiegoś przedmiotu pozostają w relacji R. Innymi słowy, x należy do dziedziny relacji R gdy istnieje taki przedmiot, względem którego x pozostaje w relacji R, co symbolicznie można zapisać:*

$$x \in D(R) \equiv (\exists y)xRy.$$

Podobnie:

Definicja 25. *Przeciwdziedzina relacji R jest to zbiór przedmiotów, względem których jakiś przedmiot pozostaje w relacji R.*

$$y \in \text{Ɑ}(R) \equiv (\exists x)xRy.$$

Tak na przykład dziedziną relacji bycia ojcem jest zbiór wszystkich osób, które są ojcami, a przeciwdziedziną tej relacji zbiór wszystkich osób mających ojca; dziedziną relacji bycia mężem jest zbiór wszystkich mężów, a jej przeciwdziedziną zbiór osób mających męża, czyli zbiór wszystkich żon.

Dysponując pojęciem relacji można określić pojęcie funkcji.

Definicja 26. *Funkcja jest to relacja, która każdemu elementowi dziedziny przyporządkowuje jeden, i tylko jeden element przeciwdziedziny.*

$$Funkcja\ (R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge xRz) \rightarrow y = z]$$

Zatem R jest funkcją wtedy, gdy nie może zachodzić przypadek, że jednemu elementowi dziedziny odpowiadają dwa elementy przeciwdziedziny. Przykłady funkcji: relacja zachodząca między wartościami logicznymi argumentów funktora prawdziwościowego a wartością logiczną wyrażenia utworzonego za pomocą tego funktora; relacja między osobami a datami ich urodzenia; relacja między osobami a ich matkami; działanie dodawania jako funkcja zachodząca między składnikami dodawania a ich sumą (relacja trójargumentowa), i tym podobne.

Przyglądając się podanym tu przykładom relacji możemy stwierdzić, iż relacje mogą mieć różne własności. Na przykład jedne z nich zachodzą „w jedną i w drugą stronę” (np. relacja bycia rodzeństwem), podczas gdy inne zachodzą tylko „w jedną stronę” (np. relacja bycia większym); są takie relacje, które zawsze zachodzą pomiędzy dowolną parą przedmiotów (bycie większym lub równym) oraz takie, które raz zachodzą, a innym razem nie zachodzą (bycie bratem). Podamy teraz kilka definicji podstawowych własności relacji.

Definicja 27. *Relacja R w zbiorze A jest zwrotna*

$$refl(R, A) \equiv (\forall x)[x \in A \rightarrow xRx]$$

Relacja R jest zwrotna w zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między jakimś przedmiotem należącym do tego zbioru, a nim samym.

Przykłady: relacja bycia tego samego wzrostu w zbiorze osób, relacja bycia większym lub równym w zbiorze liczb, itp. W następnych definicjach dla uproszczenia przyjmiemy, że dziedziną relacji R jest zbiór A. Będziemy wówczas mówić, że relacja R jest zwrotna (w swojej dziedzinie), czyli po prostu, że relacja R jest zwrotna, symetryczna, i tak dalej.

Definicja 28. *Relacja R jest symetryczna*

$$sym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \rightarrow yRx]$$

Relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli ta relacja zachodzi między pierwszym a drugiem przedmiotem, to zachodzi także między przedmiotem drugim a pierwszym.

Przykłady: relacja bycia rodzeństwem, relacja bycia małżonkiem, itp.

Definicja 29. *Relacja R jest przechodnia*

$$trans(R) \equiv (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$$

Relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej trójki przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem oraz między drugim a trzecim przedmiotem, to zachodzi także między pierwszym a trzecim przedmiotem tej trójki.

Przykłady: relacja bycia potomkiem, relacja bycia większym, itp.

Definicja 30. *Relacja R jest spójna*

$$con(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[\sim (x = y) \rightarrow xRy \vee yRx]$$

Relacja R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta zawsze zachodzi między dowolną parą różnych przedmiotów.

Np. relacja bycia większym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, itp.

Definicja 31. *Relacja R jest asymetryczna*

$$asym(R) \equiv (\forall x)(\forall y)[xRy \rightarrow \sim (yRx)]$$

Relacja R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary przedmiotów, jeśli relacja ta zachodzi między pierwszym a drugim przedmiotem jakiejś pary, to nie zachodzi między przedmiotem drugim a pierwszym tej pary.

Np. relacja bycia ojcem, relacja bycia dłużnikiem, itp.

Powyższe definicje umożliwiają określenie dwóch zasadniczych typów relacji: relacji równoważnościowej oraz relacji porządkujących.

Definicja 32. *Relacja R jest równoważnościowa*

$$\equiv [refl(R) \wedge sym(R) \wedge trans(R)]$$

Relacja jest równoważnościowa, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady: relacja równoważności w zbiorze wyrażeń, relacja równoległości w zbiorze prostych, relacja przystawania w zbiorze trójkątów itp. Relacje równoważnościowe mają duże znaczenie przy konstruowaniu definicji. Otóż wszystkie przedmioty, między którymi zachodzi relacja równoważnościowa mają wspólną własność, której nie mają przedmioty w tej relacji nie pozostające. Np. wszystkie odcinki do siebie przystające mają tę samą długość, a wszystkie trójkąty, które są do siebie podobne mają ten sam kształt. Można więc powiedzieć, że kształt jakiegoś trójkąta jest to wspólna własność wszystkich trójkątów do niego podobnych, a długość jakiegoś odcinka to wspólna cecha wszystkich odcinków przystających do tego odcinka.

Drugim z ważnych pojęć teorii relacji jest pojęcie relacji porządkującej. Odróżnia się mocniejsze i słabsze pojęcia porządku.

Definicja 33. *Relacja R porządkuje zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja R jest relacją asymetryczną, przechodnią i spójną w zbiorze A.*

Takimi relacjami są na przykład: relacje bycia większym lub bycia mniejszym w zbiorze liczb, relacja bycia jaśniejszym w zbiorze barw, i tak dalej.

Definicja 34. *Relacja R częściowo porządkuje zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy relacja ta jest asymetryczna i przechodnia w zbiorze A.*

Przykładami relacji częściowo porządkującej są: wszystkie relacje porządkujące, relacja bycia starszym w zbiorze osób (relacja ta jest tylko częściowo porządkująca, bo mogą być osoby mające tyle samo lat, między którymi relacja bycia starszym nie zachodzi).

Wskazanie relacji porządkujących jakiś zbiór przedmiotów jest operacji szeregowania przedmiotów. Relacja posiadania niższego numeru w albumie jest relacją porządkującą zbiór studiujących na uniwersytecie, która umożliwia ich uszeregowanie. Relacja "bycia wcześniej kupioną" częściowo porządkuje zbiór książek w bibliotece, a relacja bycia bardziej inteligentnym porządkuje częściowo zbiór studentów.

1.5.3. Zadania - zbiory i relacje

1. Dane są trzy zbiory:
   A - zbiór trójkątów prostokątnych
   B - zbiór trójkątów równobocznych
   C - zbiór trójkątów równoramiennych
   Jaki figury należą do następujących zbiorów:
   — $B \cap C$
   — $B \cup C$
   — $A - B$
   — $C - B$
   — $A \cup C$
   — $B - A$
2. Dane są zbiory:
   A = {1, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 23, 45}
   B = {2, 3, 4, 7, 9}
   C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}
   D – zbiór liczb parzystych
   Wskaż zbiory:
   — $A - B$
   — $C - D$
   — $A \cup C$
   — $B \cup C$
   — $B \cup D$
   — $A \cap D$
   — $B \cap C$
   — $A \cap C$
   1. Podaj elementy następujących zbiorów:

   — $\{x \in \mathcal{N} : x \leqslant 2\}$
   — $\{x \in \mathcal{N} : x^2 < 7\}$
   — $\{x \in \mathcal{N} : x < -1\}$
   2. Załóżmy, że różne litery oznaczają różne przedmioty, ewentualnie liczby rzeczywiste. Zbadać jakie relacje zawierania (inkluzji) zachodzą miedzy zbiorami A i B:

   — $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;
   — $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$
   — $A = \emptyset$, $B = \{a, b, c\}$
   — $A = \{\{a\}, a, \emptyset\}$, $B = \{a\}$
   3. Załóżmy, że a, b, c, d ? ?. Jakie zależności muszą zachodzić między nimi, żeby zachodziły następujące równości:
   — $\{b, c\} = \{b, c, d\}$
   — $\{a, b, a\} = \{a, b\}$
   — $\{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$
   4. Udowodnij, że dla każdego zbioru A, B, C, D zachodzą następujące równości:
   — $[(A \cup B)–C] = [(A–C) \cup (B–C)]$

— $[A–(B–C)] = [(A–B) \cup (A \cap C)]$
— $[(A–B) \cup C] = [(A \cup C)–B] \cup (B \cap C)]$
5. Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny następujących relacji R:

— bycia bratem;
— bycia matką;
— bycia studentem;
— bycia podzbiorem;
— wynikania logicznego.
6. Scharakteryzuj od strony własności formalnych relację:

— bycia znajomym;
— bycia bratem;
— bycia starszym;
— bycia młodszą siostrą.